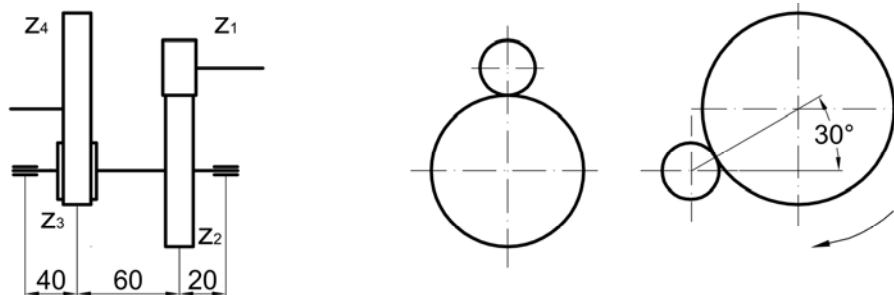


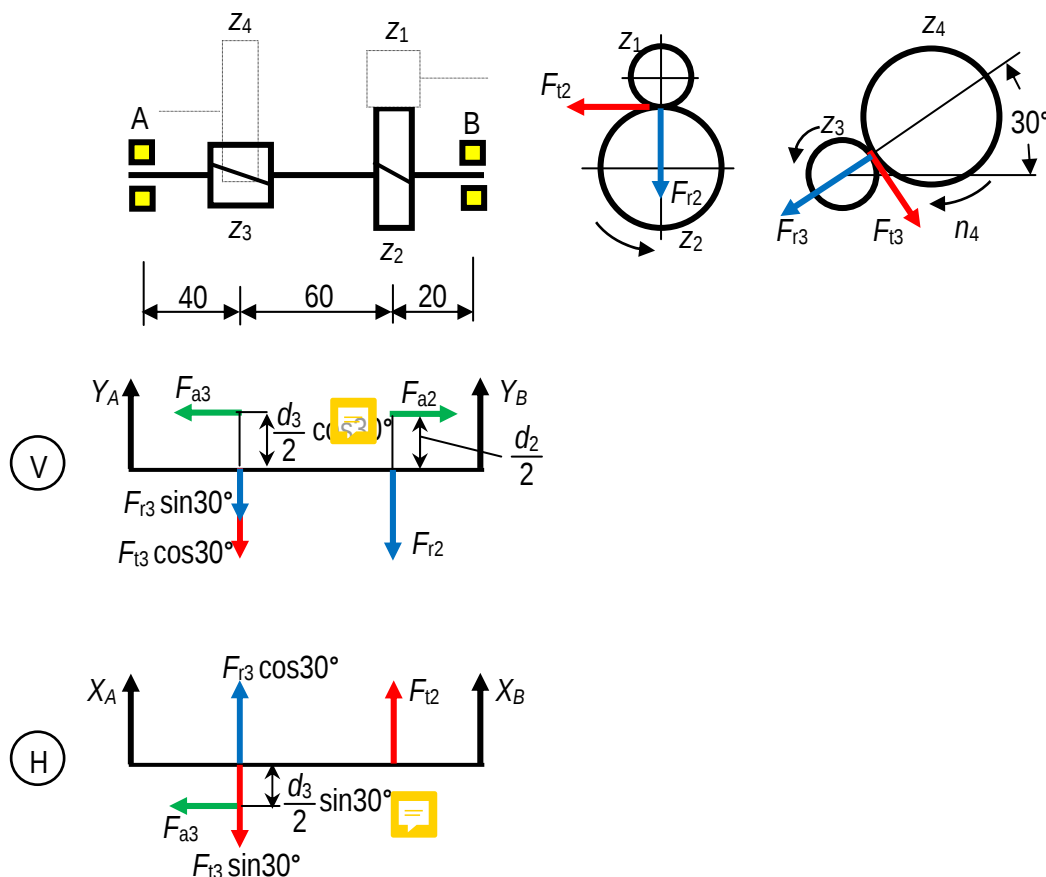
ZADATAK IZ PRETHODNOG PRORAČUNA VRATILA

Odrediti potreban prečnik zupčastog vratila na mestu zupčanika z_2 , ako je poznat materijal vratila 16MnCr5 (Č4320), nominalni obrtni moment na izlazu $T_4 = 200 \text{ Nm}$, broj obrtaja elektromotora $n_{em} = 1440 \text{ min}^{-1}$, podaci o zupčanicima: $z_1 = 14$ (L), $z_2 = 62$, $m_{n1,2} = 1 \text{ mm}$, $\beta_{1,2} = 30^\circ$, $z_3 = 12$ (D), $z_4 = 35$, $m_{n3,4} = 2,5 \text{ mm}$, $\beta_{3,4} = 15^\circ$, gubici po zupčastom paru 2%, a ostale gubitke zanemariti.



Pratite postupak koji sledi jer se on uvek sprovodi na isti način. Prvih par koraka odnose se i za 3. i za 4. zadatak, a koraci koji se odnose specifično za neki postupak, biće napomenuti posebno. Uputstvo se odnosi i na grafički rad i na objašnjenje za 3. ispitni zadatak.

• Analiza sila na vratilu



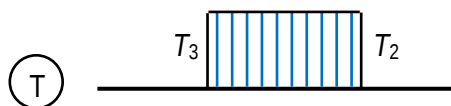
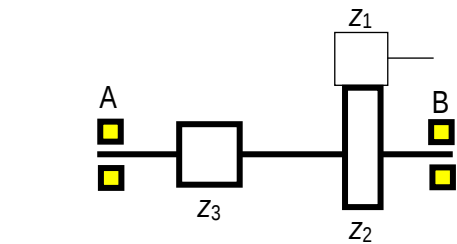
• Određivanje obrtnih momenata koji opterećuju vratilo i elemente na vratilu

Kada se priča o obrtnim momentima na vratilu, nema prelaza momenta na druge prenosne elemente, tako da nema gubitaka η .

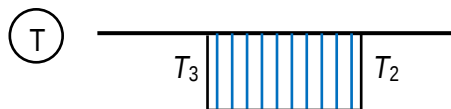
Međutim, i dalje se razmatra bilans momenata – moment koji uđe na vratilo jednak je momentu koji izađe sa vratila ili zbiru momenata koji će izaći sa vratila.

Uvek je ulazni moment onaj koji je bliži ulazu, odnosno koji prvo dobija pogon.

✚ Slučaj kada su dva zupčanika na vratilu:



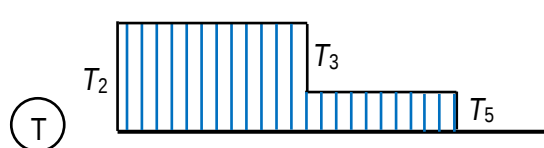
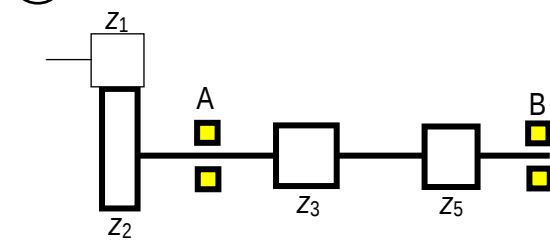
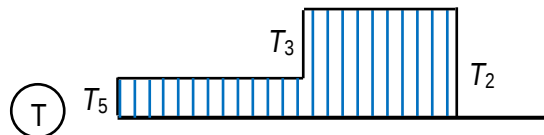
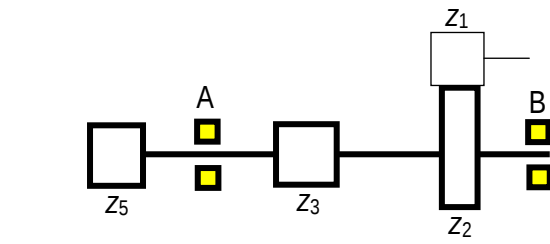
Svejedno je da li će dijagram momenata biti na jednoj ili drugoj strani, pošto T nema + ili –



Šta se može zaključiti iz dijagrama obrtnih momenata:

- $T_2 = T_3$
- između z_2 i z_3 postoji uvijanje
- desno od z_2 i levo od z_3 nema uvijanje, već je vratilo opterećeno samo na savijanje

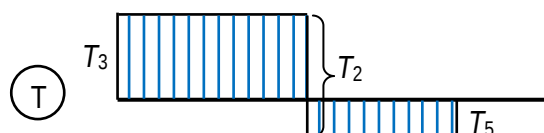
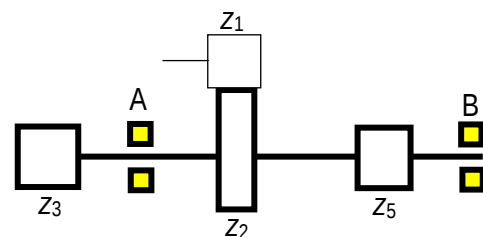
✚ Slučaj kada su tri ili više zupčanika na vratilu:



Kada je ulaz skroz desno ili skroz levo, onda su dijagrami samo sa jedne strane (slike gore), a kada je ulaz između ostalih zupčanika, onda se dijagram nalazi sa obe strane (slika dole).

Šta se može zaključiti iz ovih dijagrama obrtnih momenata:

$$T_2 = T_3 + T_5$$



Šta se još može zaključiti iz npr. ovog dijagrama desno:

- između z_3 i z_5 postoji uvijanje, a desno od z_5 vratilo je opterećeno samo na savijanje
- između z_3 i z_2 moment uvijanja iznosi T_3 , a između z_2 i z_5 moment uvijanja iznosi T_5 . Samo u z_2 je T_2 .
- $T_A = T_3$

Preporučuje se da se u 3. i 4. zadatku ispod analize sila obavezno crta i dijagram obrtnih momenata. Na taj način manje su šanse da se napravi greška, a svi momenti nacrtani na dijagramu T , određuju se bilansom momenata.

Na prethodnoj strani objašnjeni su svi mogući slučajevi koji se mogu javiti u zavisnosti od broja i rasporeda zupčanika. Za ovaj zadatak bitan je samo prvi dijagram momenata uvijanja sa dva zupčanika na vratilu.

🔧 Obrtni moment koji deluje na zupčanicu z_2 i z_3 :

$$T_2 = T_3 = \frac{T_4}{\frac{z_4}{z_3} \eta_{34}} = \frac{200}{\frac{35}{12} \cdot 0,98} = 69,971 \text{ Nm}$$

• Određivanje sila na prenosnim elementima na vratilu

Prenosni elementi na vratilu mogu biti zupčanici ili kaišnici i analiza njihovih sila je prethodno urađena. Kod kaišnika postoji samo jedna sila koja opterećuje vrtilo i to je radijalna sila.

Ukoliko je reč o trapeznom ili višeprofilnom kaišniku, radijalna sila se određuje na sledeći način:

$$F_r = (1,5 \dots 2) \cdot C_A \cdot F_t \quad (\text{ME, (4.67)/str.132})$$

Ukoliko je reč o zupčastom kaišniku, radijalna sila se određuje na sledeći način:

$$F_r = 1,5 \cdot C_A \cdot F_t \quad (\text{ME, (4.85)/str.162})$$

U ovom zadatku na vratilu se nalaze samo zupčanici. U zavisnosti od njihovog oblika, koriste se različiti obrasci za odgovarajuće zupčanike:

cilindrični zupčanici – ME, str.210-211, izrazi (4.148) - (4.150)

konusni zupčanici – ME, str.233, izrazi (4.164) - (4.171)

pužni zupčanici – ME, str.241-242, izrazi (4.190) - (4.194)

Treba primetiti da se obimna sila kod svih zupčanika **određuje na isti način**:

$$F_t = \frac{2 \cdot T_R}{d}, \text{ gde je } T_R = T \cdot K_A - \text{radni obrtni moment (moment pomnožen faktorom udara } K_A, \text{ tab.4.40/str.213), } d - \text{prečnik zupčanika}$$

U ovom zadatku na vratilu se nalaze samo cilindrični zupčanici, tako da se vrednosti njihovih sila računaju na sledeći način:

🔧 **Sile na zupčanicu z_2 :**

$$\text{obimna sila: } F_{t2} = \frac{2 \cdot T_{R2}}{d_2} = \frac{2 \cdot 69971}{71,591} = \mathbf{1955 \text{ N}}$$

$$\text{gde je } T_{R2} = T_2 \cdot K_A = 69,971 \cdot 1 = 69,971 \text{ Nm}$$

Voditi računa da se jedinice u izrazima poklapaju. Pisati jedinice svuda, inače može doći do greške kasnije.

K_A – faktor radnih uslova (tab.4.40/str.213) se u ovom zadatku ne pominje, pa se uzima ravnomerni rad, $K_A = 1$

d_2 – prečnik zupčanika

$$d_2 = \frac{m_{n12} \cdot z_2}{\cos \beta_{12}} = \frac{1 \cdot 62}{\cos 30^\circ} = 71,591 \text{ mm}$$

$$\text{radijalna sila: } F_{r2} = F_{t2} \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta_{12}} = 1955 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\cos 30^\circ} = \mathbf{822 \text{ N}}$$

$$\text{aksijalna sila: } F_{a2} = F_{t2} \tan \beta_{12} = 1955 \cdot \tan 30^\circ = \mathbf{1129 \text{ N}}$$

✚ **Sile na zupčaniku z₃:**

$$\text{obimna sila: } F_{t3} = \frac{2 \cdot T_{R3}}{d_3} = \frac{2 \cdot 69971}{31,058} = \mathbf{4506 \text{ N}}$$

gde je $T_{R3} = T_{R2} = 69,971 \text{ Nm}$

$$d_3 = \frac{m_{n34} \cdot z_3}{\cos \beta_{34}} = \frac{2,5 \cdot 12}{\cos 15^\circ} = 31,058 \text{ mm}$$

$$\text{radijalna sila: } F_{r3} = F_{t3} \frac{\tan \alpha_n}{\cos \beta_{34}} = 4506 \cdot \frac{\tan 20^\circ}{\cos 15^\circ} = \mathbf{1698 \text{ N}}$$

$$\text{aksijalna sila: } F_{a3} = F_{t3} \tan \beta_{34} = 4506 \cdot \tan 15^\circ = \mathbf{1207 \text{ N}}$$

Voditi računa da uglovi zakošenja zubaca β_{12} i β_{34} nemaju nikakve veze sa uglom položaja od 30° koji je dat na crtežu. To su nezavisni podaci.

• **Određivanje otpora oslonaca (sila u ležajima) – ne mora uvek**

NAPOMENA 1: Otpori oslonaca su najčešće sadržani u obrascu za moment savijanja (vidi kasnije), ali se u svakom slučaju oni moraju odrediti ako se proračunavaju ležaji. Kada su zupčanici na prepustu, moment savijanja se može odrediti samo na osnovu aktivnih sila, pa se onda reakcije oslonaca ne moraju računati. Ovaj zadatak će biti naglašen kasnije.

NAPOMENA 2: Određivanje otpora oslonaca određuje se metodom koja je pređena u Otpornosti materijala.

Na osnovu analize sila koja je urađena za vertikalnu i horizontalnu ravan, određuje se suma momenata savijanja za vertikalnu i horizontalnu ravan u tački A. Na taj način se dobijaju reakcije u osloncu B za vertikalnu (Y_B) i horizontalnu ravan (X_B).

✚ Suma momenata savijanja za tačku A u vertikalnoj ravni:

$$\sum M_{AV} = 0$$

$$Y_B \cdot 120 - F_{r2} \cdot 100 - F_{a2} \cdot \frac{d_2}{2} - (F_{t3} \cos 30^\circ + F_{r3} \sin 30^\circ) \cdot 40 + F_{a3} \cdot \frac{d_3}{2} \sin 30^\circ = 0$$

$$Y_B = \frac{1}{120} \left[F_{r2} \cdot 100 + F_{a2} \cdot \frac{d_2}{2} + (F_{t3} \cos 30^\circ + F_{r3} \sin 30^\circ) \cdot 40 - F_{a3} \cdot \frac{d_3}{2} \sin 30^\circ \right]$$

$$Y_B = \frac{1}{120} \left[822 \cdot 100 + 1129 \cdot \frac{71,591}{2} + (4506 \cdot \cos 30^\circ + 1698 \cdot \sin 30^\circ) \cdot 40 - 1207 \cdot \frac{31,058}{2} \sin 30^\circ \right]$$

$$Y_B = \mathbf{2527 \text{ N}}$$

✚ Suma momenata savijanja za tačku A u horizontalnoj ravni:

$$\sum M_{AH} = 0$$

$$X_B \cdot 120 + F_{t2} \cdot 100 - (F_{t3} \sin 30^\circ - F_{r3} \cos 30^\circ) \cdot 40 - F_{a3} \cdot \frac{d_3}{2} \cos 30^\circ = 0$$

$$X_B = \frac{1}{120} \cdot \left[-F_{t2} \cdot 100 + (F_{t3} \sin 30^\circ - F_{r3} \cos 30^\circ) \cdot 40 + F_{a3} \cdot \frac{d_3}{2} \cos 30^\circ \right]$$

$$X_B = \frac{1}{120} \cdot \left[-1955 \cdot 100 + (4506 \cdot \sin 30^\circ - 1698 \cdot \cos 30^\circ) \cdot 40 + 1207 \cdot \frac{31,058}{2} \cos 30^\circ \right]$$

$X_B = -1233 \text{ N}$ (znak „-“ odnosi se samo na suprotan smer sile, ali ne treba ništa menjati, već samo pisati „-“ pri korišćenju ove sile)

• Izračunavanje momenta savijanja na mestu zupčanika z_2

Na osnovu analize sila, određuju se momenti u vertikalnoj i horizontalnoj ravni za mesto na kome određujemo prečnik.

✚ Moment savijanja na mestu zupčanika z_2 u vertikalnoj ravni (sa desne strane):

$$M'_{2V} = Y_B \cdot 20 = 2527 \cdot 20 = 50540 \text{ Nmm}$$

$$M''_{2V} = Y_B \cdot 20 - F_{a2} \cdot \frac{d_2}{2} = 2527 \cdot 20 - 1129 \cdot \frac{71,591}{2} = 10126,9 \text{ Nmm}$$

Napomena: Dva momenta savijanja u istoj tački se računaju samo kada u toj tački deluje moment, pa se onda računa jedan moment blisko levo od te tačke i drugi moment, blisko desno od te tačke. Ovde moment u tački pravi aksijalna sila F_{a2} . Ukoliko u toj tački ne deluje aksijalna sila, računa se samo jedan moment. Od ta dva momenta **treba odabrati veći po apsolutnoj vrednosti**.

Ovde se kao veći moment usvaja $M_{2V} = 50540 \text{ Nmm}$.

✚ Moment savijanja na mestu zupčanika z_2 u horizontalnoj ravni (sa desne strane):

$$M_{2H} = X_B \cdot 20 = -1233 \cdot 20 = -24660 \text{ Nmm}$$

Napomena: Pošto ovde nema aksijalne sile koja pravi moment u tački, određuje se samo jedan moment

✚ Ukupni moment savijanja na mestu zupčanika z_2 :

$$M_2 = \sqrt{M_{2H}^2 + M_{2V}^2} = \sqrt{50540^2 + 24660^2} = 56235,3 \text{ Nmm}$$

Napomena: Dovde je zajednički deo i za prethodni i za završni proračun. Veoma je slično i kod ležaja, samo tamo nije potreban moment savijanja.

Na kraju zajedničkog dela proračuna vratila poznat je:

- obrtni moment na mestu zupčanika z_2 :

$$T_{R2} = 69971 \text{ Nmm}$$

- moment savijanja na mestu zupčanika z_2 :

$$M_2 = 56235,3 \text{ Nmm}$$

KRAJ ZAJEDNIČKOG DELA

DEO KOJI SLEDI PRIPADA ISKLJUČIVO PRETHODNOM PRORAČUNU KADA SE ODREĐUJE PREČNIK VRATILA:

✚ Ekvivalentni moment savijanja na mestu zupčanika z_2 :

$$M_{i2} = \sqrt{M_2^2 + \left(\frac{\sigma_{Df(-1)}}{2 \tau_{D(0)}} \cdot T_{2R} \right)^2} = \sqrt{56235,3^2 + \left(\frac{360}{2 \cdot 350} \cdot 69971 \right)^2} = 66763,3 \text{ Nmm}$$

gde je za materijal vratila 16MnCr5 (tab.2.5/str.30-31):

$$\sigma_{Df(-1)} = 320 \dots 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \text{ usvaja se } \sigma_{Df(-1)} = 360 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\tau_{D(0)} = 300 \dots 400 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \text{ usvaja se } \tau_{D(0)} = 350 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$R_m = 800 \dots 1100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}, \text{ usvaja se } R_m = 950 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

✚ Dozvoljeni napon vratila na mestu zupčanika z_2 :

$$\sigma_{doz} = \frac{\sigma_{Df(-1)}}{S \cdot K} = \frac{360}{2 \cdot 2} = 90 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

gde je: S – stepen sigurnosti vratila

$S = 1,5 \dots 2,5$, usvaja se $S = 2$

K – koeficijent dinamičke izdržljivosti (tab.5.1/str.253)

$K = 1,8 \dots 2,2$, usvaja se $K = 2$ (sa žlebom za klin i $R_m > 700 \text{ N/mm}^2$)

NAPOMENA: Koeficijent dinamičke izdržljivosti zavisi od oblika vratila na mestu na kome se računa prečnik. Najčešći slučajevi u zadacima su:

1. kada se prečnik vratila računa na mestu velikog zupčanika koji se povezuje sa vratilom preko klina – slučaj **sa žlebom za klin**,
2. kada se prečnik vratila računa na mestu ležaja – slučaj **spoj sa obrtnim delovima sa čvrstim / neizvesnim naleganjem**,
3. kada se prečnik vratila računa na mestu malog zupčanika koji je izjedna izrađen sa vratilom – slučaj **ožlebljeno vratilo sa evolventnim bokovima**,
4. kada se prečnik vratila računa na mestu puža koji je izjedna izrađen sa vratilom – slučaj **na mestima sa navojem**.

✚ Potreban prečnik vratila:

$$d_{v2} = \sqrt[3]{\frac{10 M_{i2}}{\sigma_{doz}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 66763,3}{90}} = 19,5 \text{ mm}$$

Ovaj prečnik vratila, u ovom slučaju, treba usvojiti prema tab.5.2/str.255:

$$d_{v2} = 20 \text{ mm}$$

NAPOMENA: Za prethodno navedena četiri najčešća slučaja oblika vratila, slede preporuke kako usvojiti prečnik vratila:

1. slučaj **sa žlebom za klin** – usvojiti prečnik prema tab.5.2/str.255,

2. slučaj **spoj sa obrtnim delovima sa čvrstim / neizvesnim naleganjem** – pošto se prečnik usvaja na mestu ležaja, potrebno je odabrati dimenziju ležaja (str. 405-406),
3. slučaj **ožlebljeno vratilo sa evolventnim bokovima** – pošto je prečnik vratila ujedno i prečnik malog zupčanika, onda se prečnik vratila samo poredi sa prečnikom zupčanika

$$d = \frac{m_n \cdot z}{\cos \beta}$$

4. slučaj **na mestima sa navojem** – pošto je prečnik vratila ujedno i prečnik puža, onda se prečnik vratila samo poredi sa prečnikom puža

$$d = m \cdot q$$