

Slučaj stacionarnog kretanja vozila

Upravljivost vozila

- Stacionarno kretanje znači:

$v, \theta, \delta_{P/Z}, \beta, d\phi/dt = \omega_z$, \rightarrow nepromenljive veličine u vremenu

- vozilo se kreće konstantnom brzinom po kružnici konstantnog radiusa R_K , pol brzina ima nepromenljivi položaj \Rightarrow obrtanje oko nepokretnе ose, $\rho = R_K$

- Analiza upravljivosti vozila:

analizira se potreban ugao zakretanja upravljačkog točka (θ) u zavisnosti od normalnog ubrzanja (odn. brzine vozila), za određeni radijus krivine R_K

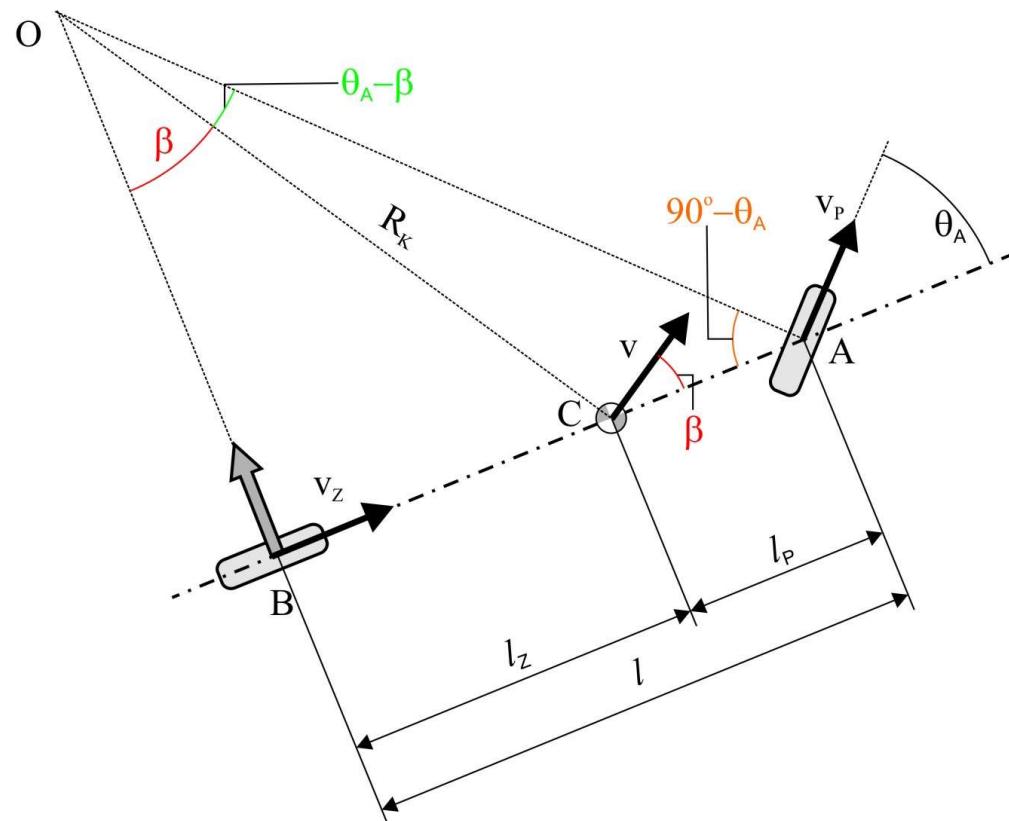
- Vidovi upravljivosti:

- neutralna upravljivost
- podupravlјivost
- nadupravlјivost

- PAŽNJA: stacionarno kretanje \Rightarrow stabilno! Analiza se ne odnosi na granične slučajeve gubitka prijanjanja na prednjoj ili zadnjoj osovini
- Merodavne situacije: kretanje vozila na otvorenom putu (vangradska vožnja) – srednje i veće brzine, mali uglovi, umerena bočna ubrzanja

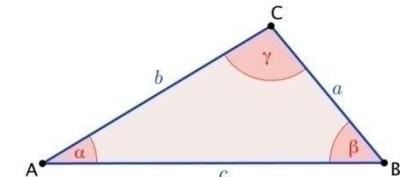
Radius krivine za slučaj odsustva povođenja točkova

- Uvodi se pojam: "Akermanov radius" – odnosi se na slučaj $\delta_P = \delta_Z = 0$
- Situacija odgovara veoma malim brzinama kretanja (manevrisanje na malom prostoru)
- "Kinematicko skretanje"



sinusna teorema

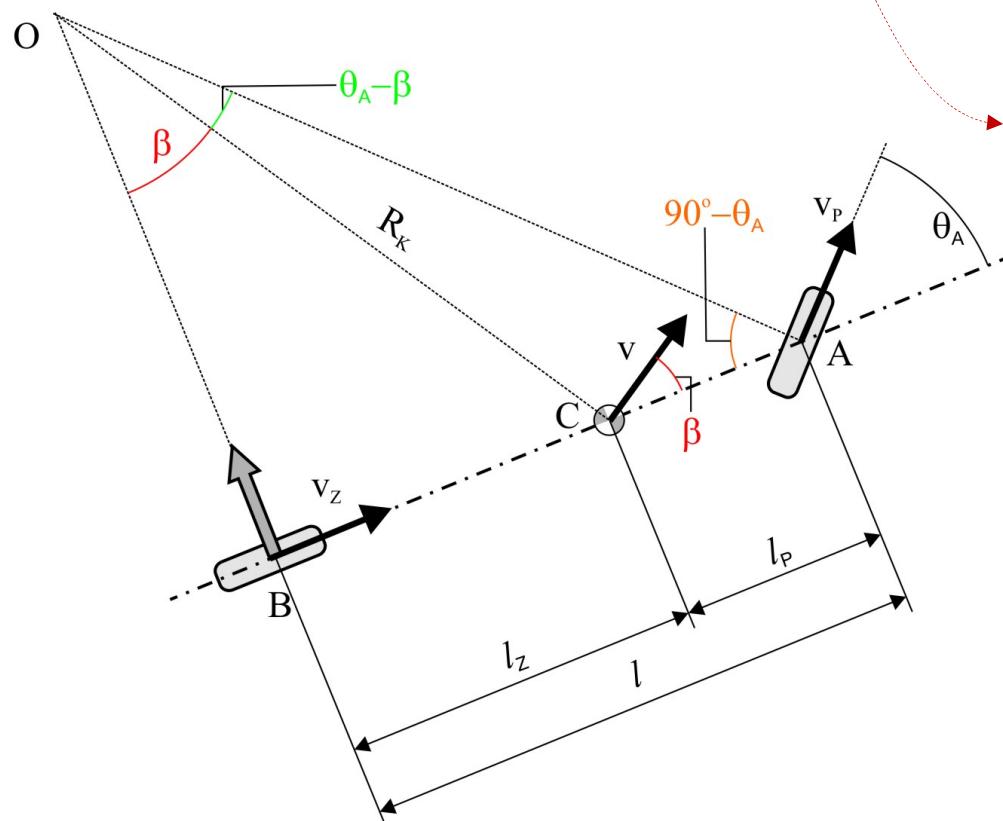
$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$



Radius krivine za slučaj odsustva povođenja točkova

Trougao OCA: $\frac{\sin(\theta_A - \beta)}{l_P} = \frac{\sin(\pi/2 - \theta_A)}{R_K}$

Trougao OCB: $\sin\beta = \frac{l_Z}{R_K}$



$$\frac{\sin\theta_A \cos\beta - \cos\theta_A \sin\beta}{l_P} = \frac{\cos\theta_A}{R_K}$$

$$\tan\theta_A \cos\beta - \sin\beta = \frac{l_P}{R_K}$$

$$\sin\beta = \frac{l_Z}{R_K}$$

$$\boxed{\tan\theta_A \cos\beta = \frac{l}{R_K}}$$

Radius krivine za slučaj odsustva povođenja točkova

$$\operatorname{tg} \theta_A \cos \beta = \frac{l}{R_K}$$



Ograničavamo se na slučaj:

- $R_K \gg l$
- uglovi θ_A, β mali $\Rightarrow \operatorname{tg} \theta_A \approx \theta_A$ (radiani!), $\cos \beta \approx 1$

$$\theta_A = \frac{l}{R_K}$$

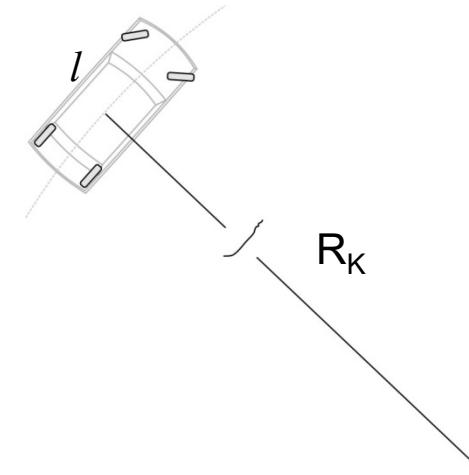
→ ugao za koji je potrebno zaokrenuti upravljački točak, da bi se centar mase vozila osovinskog razmaka l kretao po kružnici radijusa R_K , u odsustvu povođenja točkova.

Radius krivine za slučaj odsustva povođenja točkova

Akermanov radius krivine u funkciji ugla zakretanja upravljačkog točka - primer

(podaci su ilustrativnog karaktera)

Osovinsko rastojanje 1 [mm]: 2600			
Prenosni odnos upr. meh. θ_R/θ (pribl.): 20			
Ugao zakretanja upravljača θ_R [°]	Ugao zakretanja upravljačkog točka θ [°]	Radius krivine [m]	Bočno ubrzanje pri 80 km/h [m/s ²]
5	0.25	595.9	0.83
10	0.5	297.9	1.66
20	1	149.0	3.31
40	2	74.5	6.63
90	4.5	33.1	14.92



izrazito nelinearno!
neostvarljivo u
normalnim uslovima!

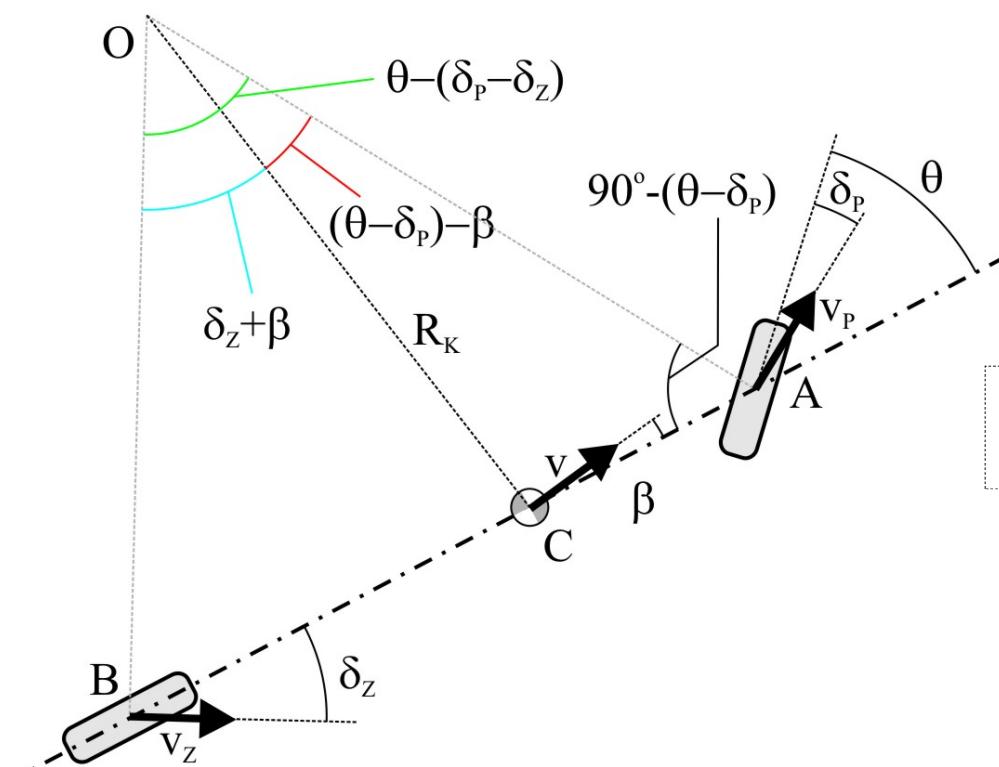
Zaključak: u svim relevantnim situacijama je $R_K \gg 1 \rightarrow$ koristi se za pojednostavljenje dalje geometrijske analize

Merodavno R_K : okvirno ~100÷500 m

Uticaj povođenja točkova na radijus krivine

- Povođenje menja smer vektora brzine prednjeg i zadnjeg točka
- Menja se položaj centra krivine i radijus, odnosno potrebna je korekcija ugla upravljačkog točka da bi se ostvario Akermanov radijus
- Posmatra se uticaj promene bočnog ubrzanja (veća "centrifugalna sila" \Rightarrow veće povođenje točkova) na potrebno zakretanje ugla upravljačkog točka θ , da bi vozilo nastavilo da se kreće po Akermanovom radijusu:
- **Neutralna upravljivost**: povođenje **ne ispoljava uticaj** na radijus krivine
- **Podupravljivost**: potrebno je **više** zakrenuti upravljački točak (povećati θ) da bi se kompenzovao uticaj povođenja
- **Nadupravljivost**: uticaj povođenja se kompenzuje **manjim** zakretanjem upravljačkog točka
- **Povođenje prednjih točkova**: suprotstavlja se upravljačkom dejstvu vozača (tendencija ka podupravljanju)
- **Povođenje zadnjih točkova**: podstiče jače zakretanje vozila ka unutrašnjosti krivine \Rightarrow pojačava upravljačko dejstvo vozača (tendencija ka nadupravljanju)

Uticaj povođenja točkova na radijus krivine



$$\frac{\sin((\theta - \delta_p) - \beta)}{l_p} = \frac{\sin(\pi/2 - (\theta - \delta_p))}{R_K}$$

$$\frac{\sin(\delta_z + \beta)}{l_z} = \frac{\sin(\pi/2 - \delta_z)}{R_K}$$

$\sin(\pi/2 - x) = \cos x$
Mali uglovi: $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$

$$\theta = \frac{l}{R_K} + \delta_p - \delta_z$$

Uticaj povođenja točkova na radijus krivine

- Potreban ugao zakretanja upravljačkog točka θ , da bi se centar mase vozila osovinskog rastojanja l , uz prisustvo uglova povođenje δ_P i δ_Z na prednjoj odnosno zadnjoj osovini kretao po kružnici radijusa R_K , iznosi:

$$\theta = \frac{l}{R_K} + (\delta_P - \delta_Z)$$

$$\theta = \theta_A + (\delta_P - \delta_Z)$$

Uticaj povođenja točkova na radijus krivine

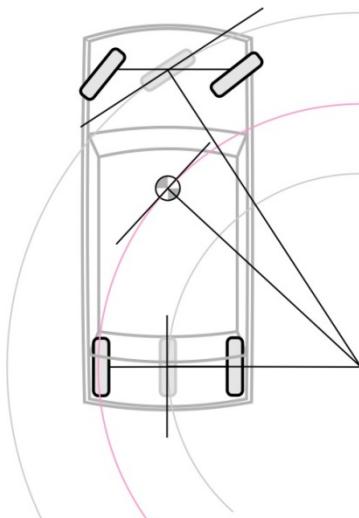
$$\theta = \theta_A + (\delta_P - \delta_Z)$$

Vidovi upravljivosti:

1. $(\delta_P - \delta_Z) > 0 \Rightarrow \theta > \theta_A \Rightarrow \text{PODUPRAVLJIVOST}$
za isto R_K mora se više zaokrenuti upravljač u odnosu na Akermanov ugao (kompenzacija povođenja)
PODUPRAVLJIVO vozilo – povođenje **napred veće nego nazad**
2. $(\delta_P - \delta_Z) < 0 \Rightarrow \theta < \theta_A \Rightarrow \text{NADUPRAVLJIVOST}$
za isto R_K mora se manje zaokrenuti upravljač u odnosu na Akermanov ugao (kompenzacija povođenja)
NADUPRAVLJIVO vozilo – povođenje **nazad veće nego napred**
3. $(\delta_P - \delta_Z) = 0 \Rightarrow \theta = \theta_A \Rightarrow \text{NEUTRALNA UPRAVLJIVOST}$
ugao zaokretanja upravljača jednak Akermanovom
NEUTRALNO UPRAVLJIVO vozilo – povođenje **napred i nazad jednako**, međusobna kompenzacija

Vidovi upravljivosti

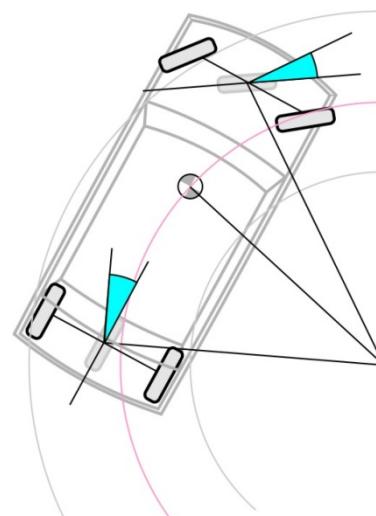
ZA FIKSNU VREDNOST UGLEA θ :



Kinematičko
skretanje

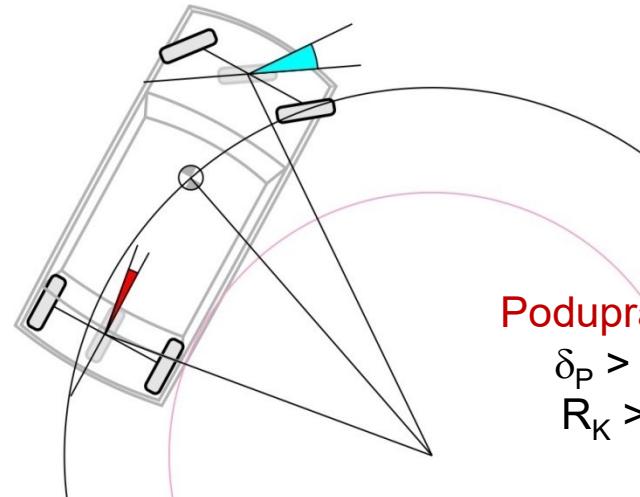
$$\delta_P = \delta_Z = 0, \quad R_K = R_{KA}$$

R_{KA} – "Akerman":
referentni poluprečnik



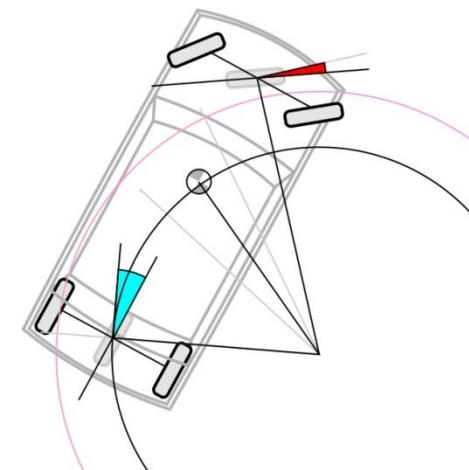
Neutralna
upravljivost

$$\delta_P = \delta_Z \Rightarrow \quad R_K = R_{KA}$$



Podupravljivost

$$\delta_P > \delta_Z \Rightarrow \quad R_K > R_{KA}$$



Nadupravljivost

$$\delta_Z > \delta_P \Rightarrow \quad R_K < R_{KA}$$

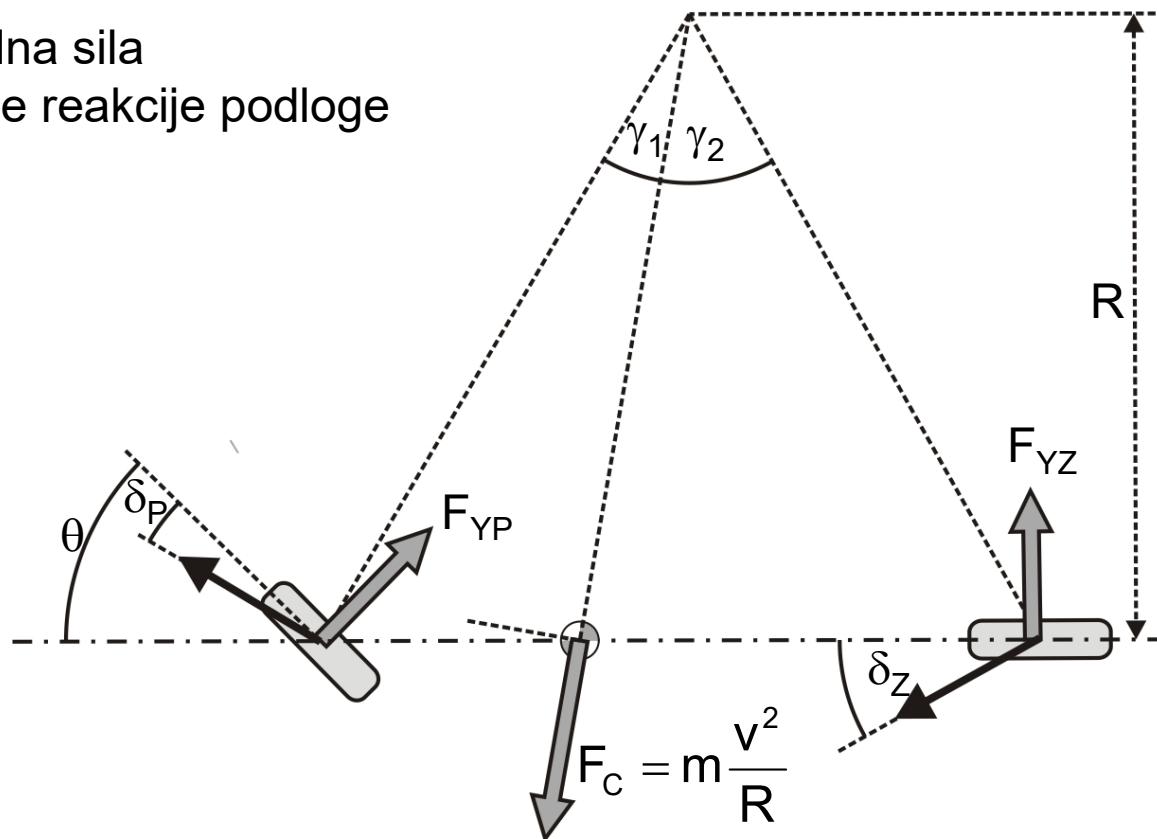
Vidovi upravljivosti

- Pojam definisan za **stacionarno** kretanje
- Vid upravljivosti zavisi od razlike povođenja točkova na prednjoj i zadnjoj osovinici
- Povođenje "efektivnog točka" i razlika u povođenju napred / nazad zavise od:
 - ⌚ Karakteristika pneumatika u bočnom pravcu – nelinearna zavisnost ugla povođenja od bočne sile i drugih radnih uslova (vertikalno opterećenje, prisustvo uzdužne sile...)
 - ⌚ Raspodele bočnih sila na točkove vozila (funkcija položaja težišta vozila - l_p , l_z , h_T , širine traga točkova, odnos krutosti prednjeg i zadnjeg oslanjanja pri bočnom naginjanju vozila ("valjanje"))
 - ⌚ Položaja točkova u odnosu na podlogu (geometrija točkova, kinematika i elastokinematika sistema oslanjanja i sistema upravljanja)

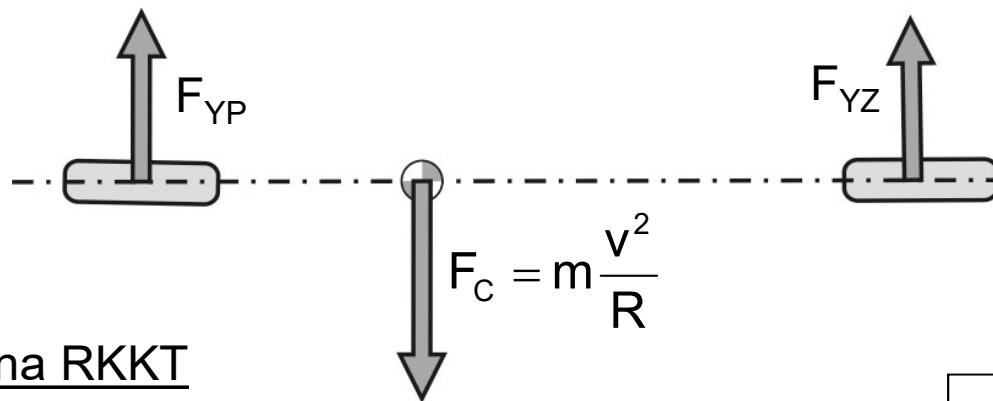
Osnove analize upravljivosti vozila

F_C – centrifugalna sila

F_{YP} , F_{YZ} – bočne reakcije podloge



Za slučaj velikog radiusa krivine i malih uglova δ i θ (uobičajen slučaj vožnje na otvorenem putu) geometrija se može pojednostaviti:



Mali uglovi:
 $\sin x \approx x$,
 $\cos x \approx 1$

2. i 3. jednačina RKKT

$$F_{YP} + F_{YZ} = m \frac{v^2}{R}$$

i

$$l_P \cdot F_{YP} = l_Z \cdot F_{YZ}$$

\Rightarrow

$$F_{YP} = \frac{l_Z}{l} \frac{m \cdot v^2}{R}$$

$$F_{YZ} = \frac{l_P}{l} \frac{m \cdot v^2}{R}$$

LINEARIZACIJA:

Za umerene vrednosti F_Y je: $F_Y = C_\delta \cdot \delta \rightarrow \delta = \frac{F_Y}{C_\delta}$

Napomena: u daljoj analizi C_δ mora biti u [N/rad] (a ne u [N/°])!

$$F_{YP} = \frac{G_P}{G} \frac{m \cdot v^2}{R} = C_{\delta P} \cdot \delta_P$$

$$F_{YZ} = \frac{G_Z}{G} \frac{m \cdot v^2}{R} = C_{\delta Z} \cdot \delta_Z$$

$$\delta_P = G_P \cdot \frac{v^2}{C_{\delta P} \cdot R \cdot g}$$

$$\delta_Z = G_Z \cdot \frac{v^2}{C_{\delta Z} \cdot R \cdot g}$$

$$\theta = \frac{l}{R_K} + (\delta_P - \delta_Z)$$

$$\theta = \frac{l}{R} + \frac{G_P \cdot v^2}{C_{\delta P} \cdot R \cdot g} - \frac{G_Z \cdot v^2}{C_{\delta Z} \cdot R \cdot g}$$

$$\theta = \frac{l}{R} + \left(\frac{G_P}{C_{\delta P}} - \frac{G_Z}{C_{\delta Z}} \right) \cdot \frac{v^2}{g \cdot R}$$

$$\theta = \frac{l}{R} + K \cdot \frac{a_y}{g}$$

$$K = \frac{G_P}{C_{\delta P}} - \frac{G_Z}{C_{\delta Z}}$$

**K - GRADIJENT
PODUPRAVLJIVOSTI**

Napomena: u daljoj analizi C_δ
mora biti u [N/rad] (a ne u [N/°])!

Primer konverzije ($1[N/°] = 360/(2\cdot\pi) [N/rad]$)

VERTIKALNO OPTEREĆENJE TOČKA (daN)	$c_\delta [N/°]$	$c_\delta [N/rad]$
100	300	17188.7
200	540	30939.7
300	760	43544.8
400	1000	57295.8
500	1140	65317.2
600	1330	76203.4

$$\theta = \frac{l}{R} + K \cdot \frac{a_y}{g}$$

$$K = \frac{G_p}{C_{\delta p}} - \frac{G_z}{C_{\delta z}}$$

K - GRADIJENT PODUPRAVLJIVOSTI

Alternativno označavanje:

$$\theta = \frac{l}{R} + K \cdot a_y$$

tada je: $K = \frac{G_p}{g \cdot C_{\delta p}} - \frac{G_z}{g \cdot C_{\delta z}}$

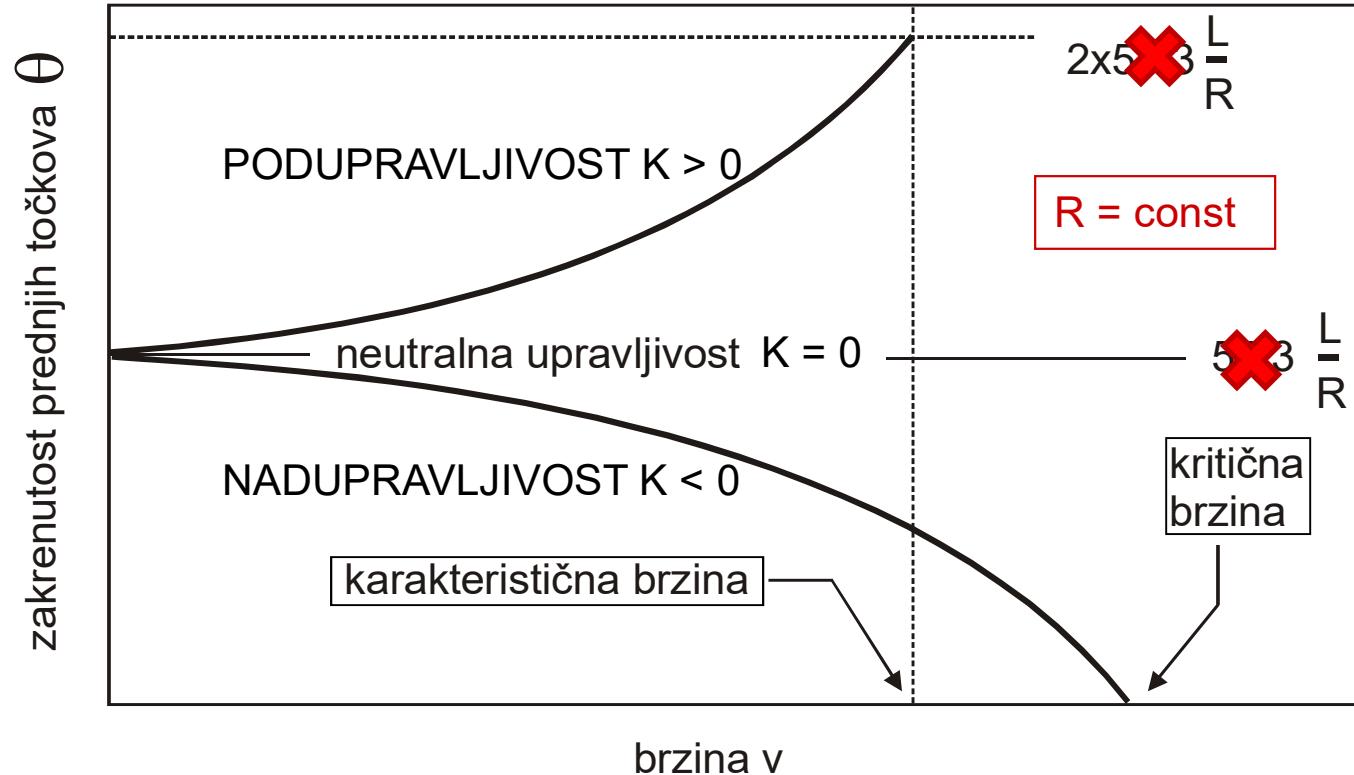
Gradijent podupravlјivosti

$$\theta = \frac{l}{R} + K \cdot \frac{a_y}{g}$$

$$K = \frac{G_p}{C_{\delta p}} - \frac{G_z}{C_{\delta z}}$$

- GRADIJENT PODUPRavlјIVOSTI

$$a_y = \frac{v^2}{R}$$



Gradijent podupravlјivosti

NADUPRAVLJIVOST → KRITIČNA BRZINA → $\theta = 0, a_y \neq 0$

PODUPRAVLJIVOST → KARAKTERISTIČNA BRZINA → $\theta = 2 \cdot \theta_{(ay = 0)}$

Gradijent podupravlјivosti

KRITIČNA BRZINA : $v_{KRIT} = \sqrt{\frac{57,3 \cdot l \cdot g}{-K}}$

**$v \geq v_{KR} \Rightarrow$ VOZILO POSTAJE
NESTABILNO!**

KARAKTERISTIČNA BRZINA: $v_{KAR} = \sqrt{\frac{57,3 \cdot l \cdot g}{K}}$

Međuosovinsko rastojanje l utiče na karakterističnu odnosno kritičnu brzinu

UTICAJ POJEDINIХ FAKTORA NA UPRAVLJIVOST

Izvedeni izraz za gradijent upravljivosti $K = \frac{G_p}{C_{\delta p}} - \frac{G_z}{C_{\delta z}}$ važi za posmatrani pojednostavljeni model.

Gradijent podupravljivosti realnog vozila zavisi od brojnih drugih faktora!

 [slajd 11](#)