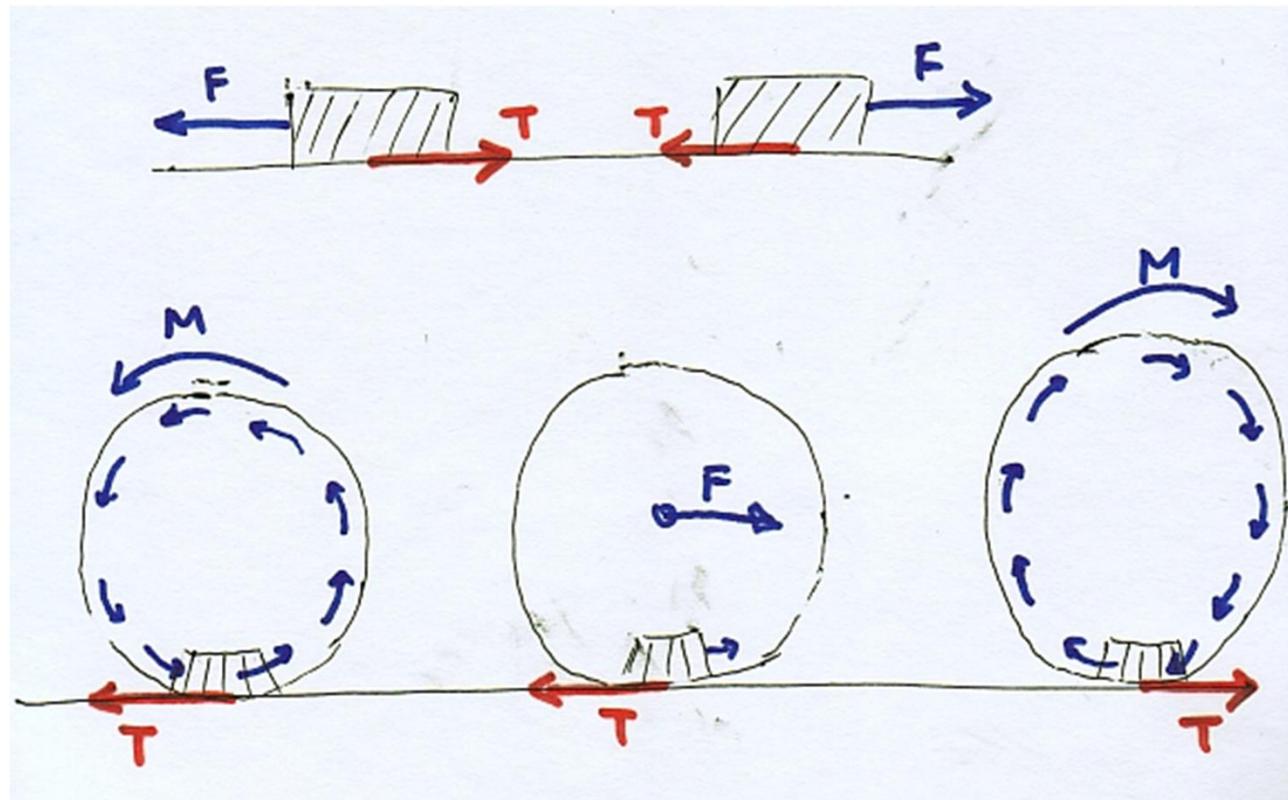


MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

- Kako se određuje smer tangencijalne reakcije?

MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA



Smer reakcije je uvek suprotan dejstvu koje teži da izazove klizanje!
Sve ovo važi bez obzira na smer ugaone brzine!

- Aktivno spoljno dejstvo (sila ili moment) teži da izazove klizanje točka.
- Tangencijalna reakcija podloge se po smeru suprotstavlja tom klizanju.

VISKOELASTIČNOST GUME

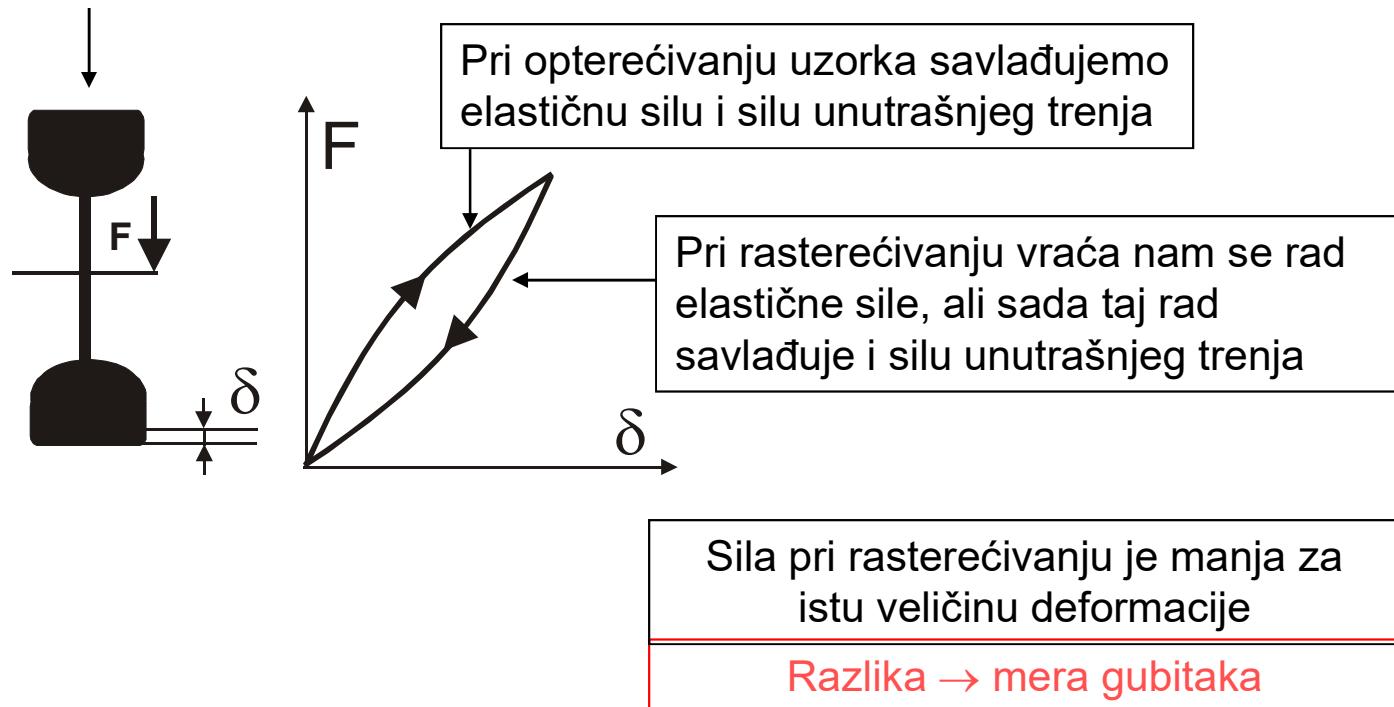
Efekat istovremenog prisustva elastičnog i viskoznog dejstva

Gumeni uzorak ispitujemo naizmeničnim istezanjem i sabijanjem



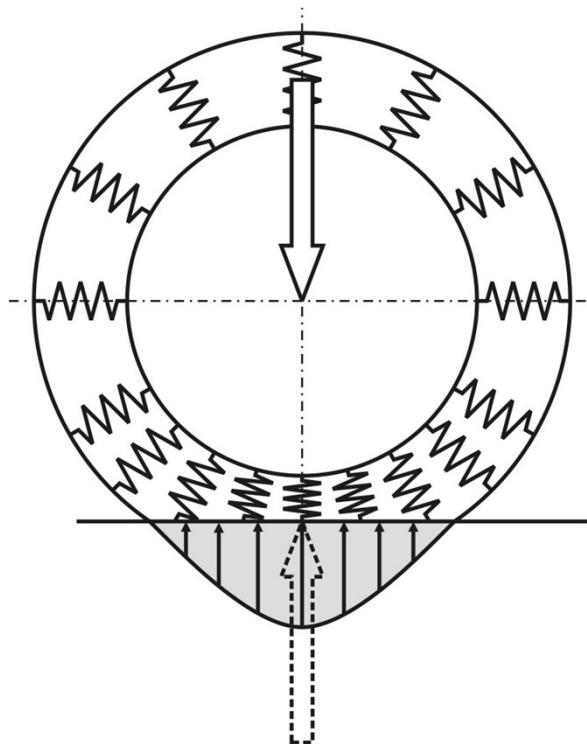
VISOELASTIČNOST GUME

HISTEREZIS – mera energetskih gubitaka usled unutrašnjeg trenja



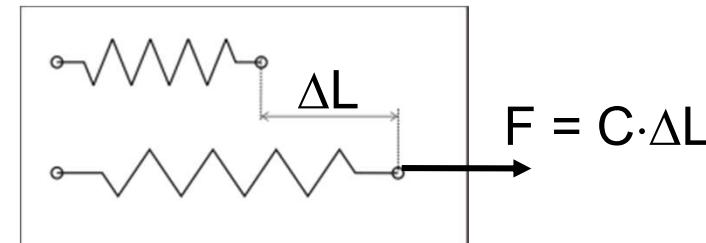
MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

Vertikalno opterećenje deformabilnog točka
koji **miruje** na krutoj podlozi



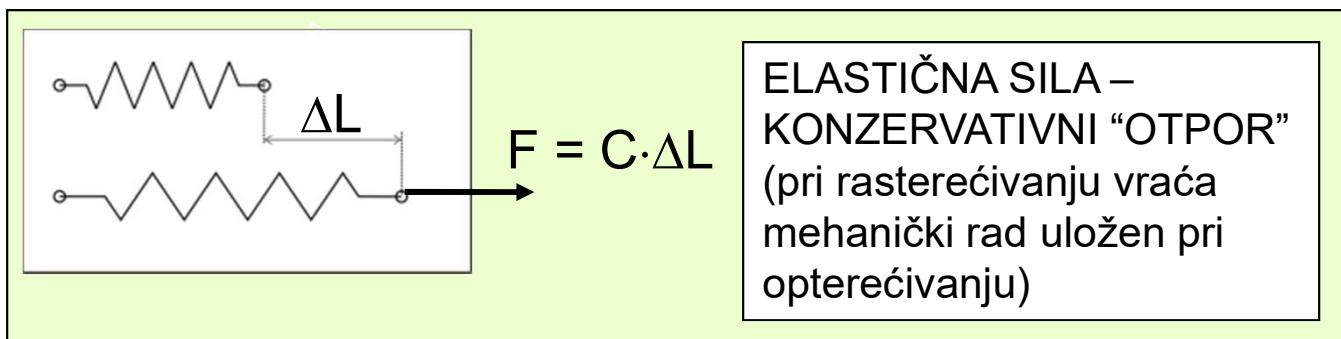
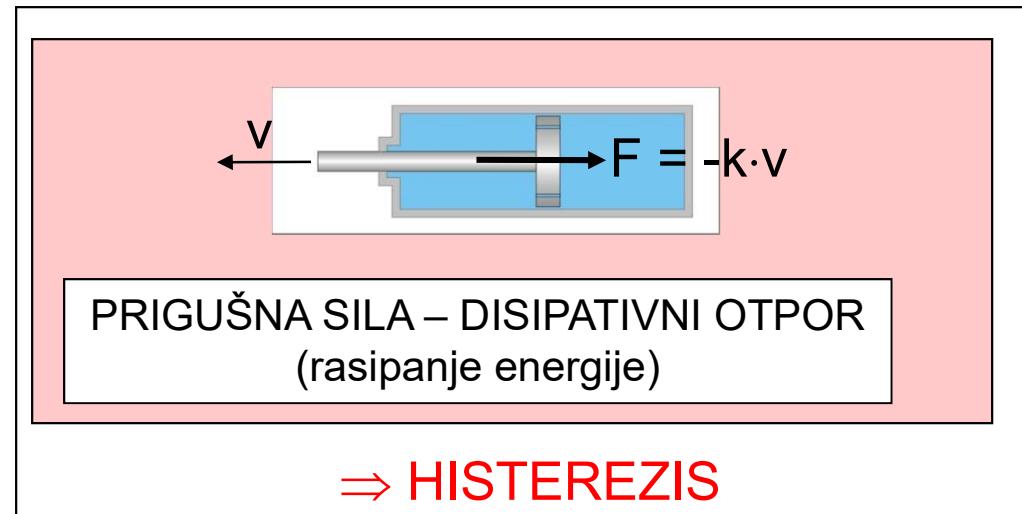
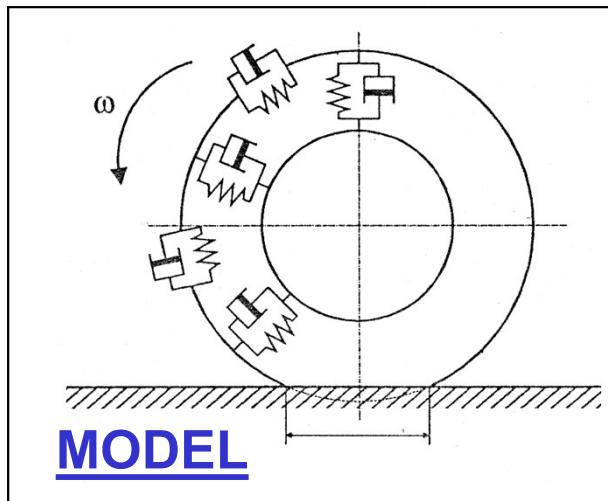
- Raspodela opterećenja je simetrična
- Rezultanta je sučiona sa spoljnim opterećenjem
- Sistem je u statičkoj ravnoteži

ELASTIČNA SILA JE TIM
VEĆA ŠTO JE VEĆA
DEFORMACIJA

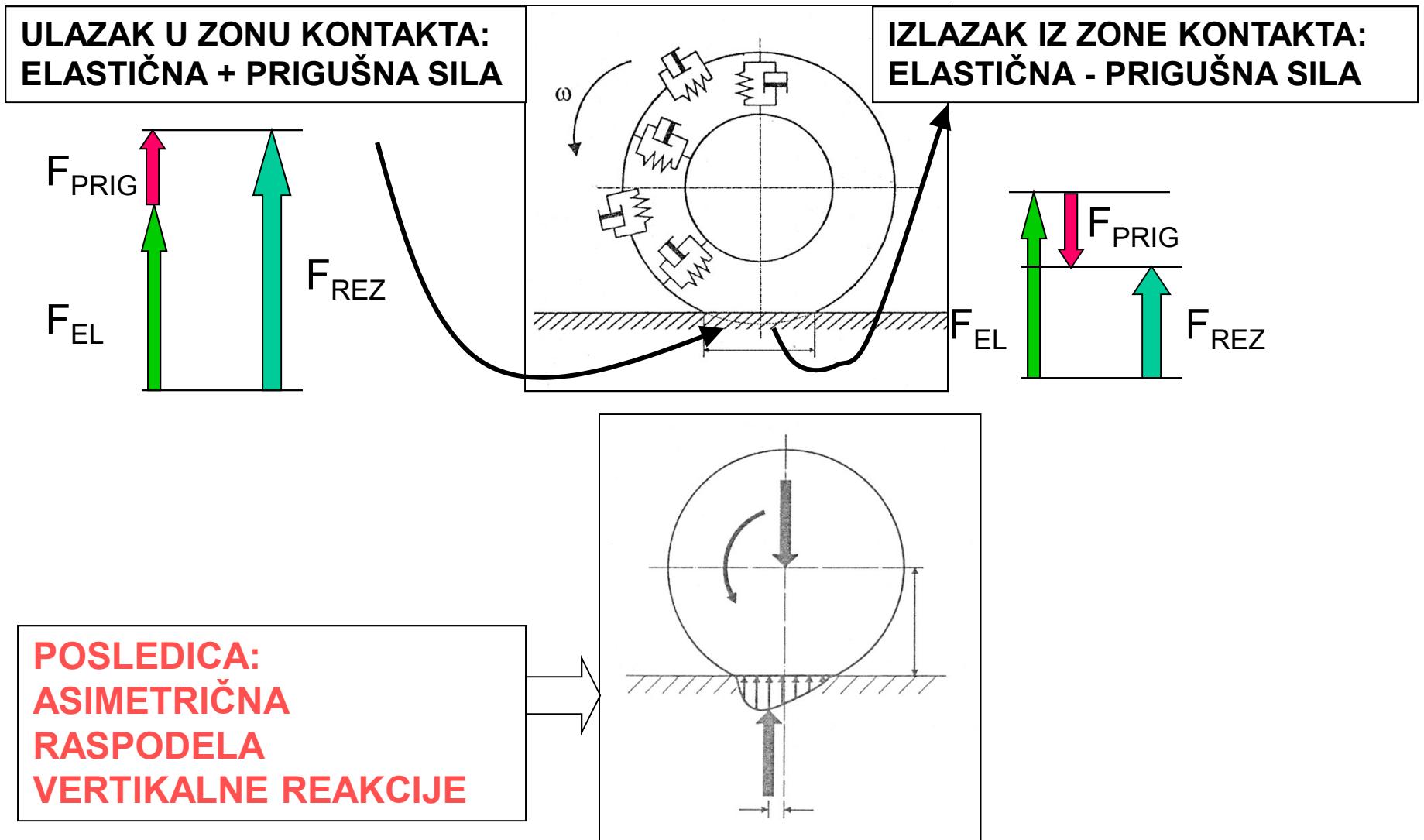


MEHANIKA KOTRLJANJA TOČKA

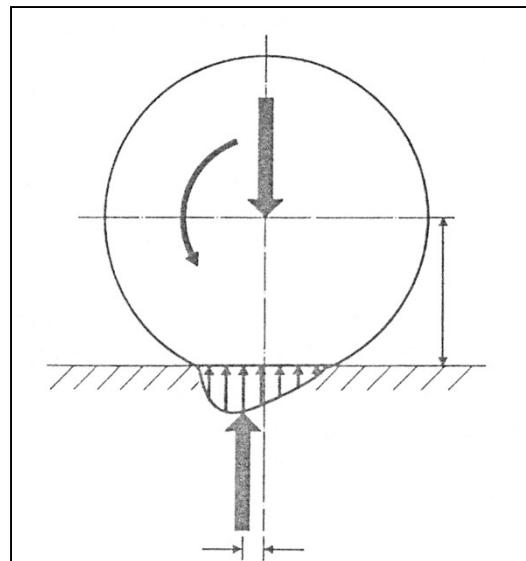
Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi



Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi – uticaj histerezisa



Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi – uticaj histerezisa



Težište krive zakonitosti kontinualnog opterećenja se premešta ISPRED ose simetrije točka, a time i rezultujuća vertikalna reakcija!

**Posledica: vertikalna reakcija stvara moment koji se suprotstavlja kotrljanju točka ⇒
NASATANAK OTPORA KOTRLJANJA (OTPOR HISTEREZISA)**

Ovo važi uvek! (pogonski, kočeni, slobodan točak)

Tj. položaj vertikalne reakcije određen je samo smerom obrtanja ali ne i smerom dejstva momenta na točak!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

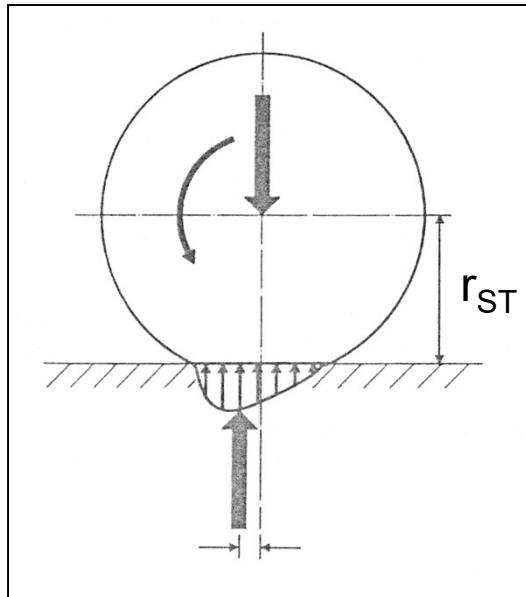
Kolika je tangencijalna reakcija u pojedinim slučajevima?

- Slobodan točak
- Pogonski točak
- Kočeni točak

- Ustaljeno kretanje
- Ubrzano ili usporen kretanje

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

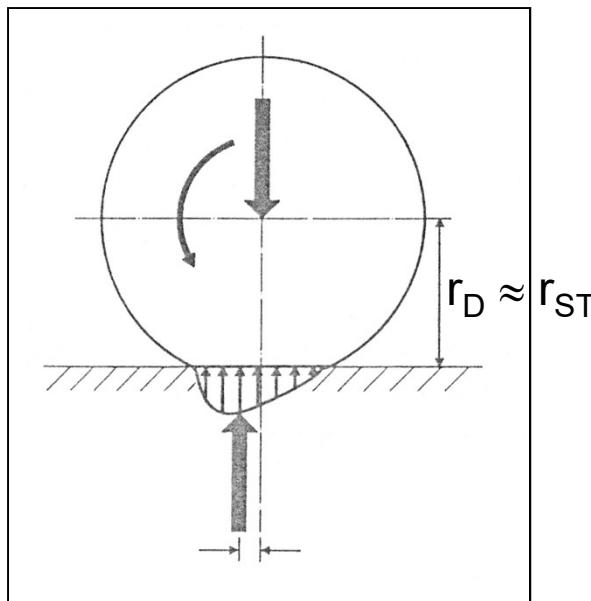
Radijus deformisanog pneumatika



- Slobodni radijus: r_0
 - Statički radijus: $r_{ST} = r_0 - f$
(f – radikalni ugib pneumatika duž vertikalne ose)
 - Dinamički radijus: $r_D = O_K / (2\pi)$
(O_K – obim kotrljanja)
 - **U opštem slučaju je $r_D \neq r_{ST}$!** → trenutni centar se u opštem slučaju ne podudara sa sredinom kontaktne površine
 - Statički radijus predstavlja krak tangencijalne reakcije podloge u odnosu na centar točka.
 - Dinamički radijus povezuje obrtno (ω) sa translatornim (v) kretanjem točka.
-
- **r_{ST} – može da se izmeri geometrijski**
 - **r_D – određuje se ispitivanjem točka u kotrljanju**

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

Dinamički radijus pneumatika



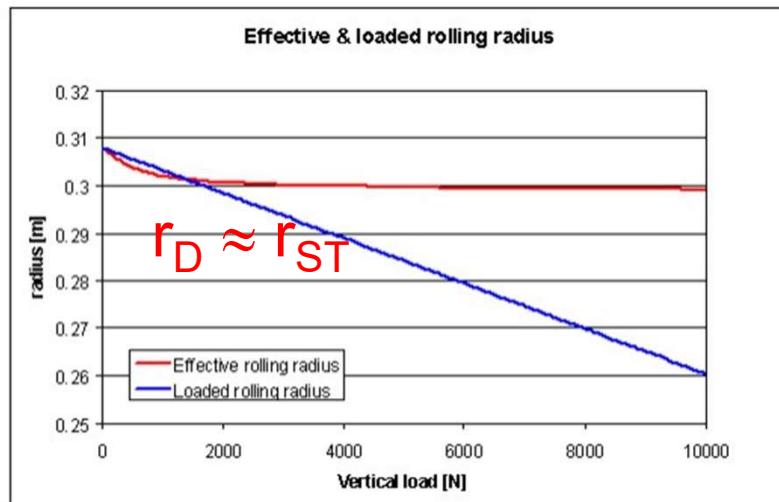
- Određuje se ispitivanjem
- Navodi se u katalogu proizvođača
- Posledica složene deformacije oboda pneumatika
- U eksploataciji su varijacije male, deklarisana vrednost se može smatrati konstantnom sa zadovoljavajućom tačnošću

USVOJIĆEMO POJEDNOSTAVLJENJE: $r_D \approx r_{ST}$!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

Odnos dinamičkog i statičkog radiusa pneumatika

Example of Loaded and Effective Tire Rolling Radius as Function of Vertical Load



Primer 1:

Izvor: Adams 2012, Using PAC2002 Tire Model

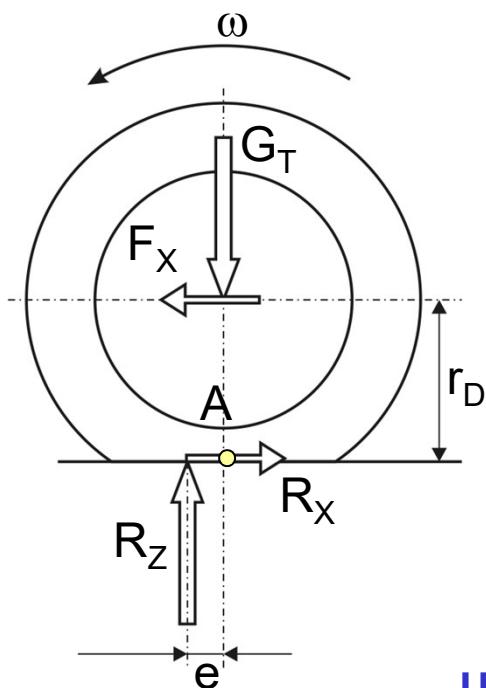
Primer 2: traktorski točak 480/70 R 24, pritisak 1,5 bar

Promena G_T sa 10kN na 20kN \Rightarrow promena r_D za $\approx 2\%$ $\Rightarrow r_D \approx \text{const}$

Izvor: Ferhadbegović, Böhler

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)



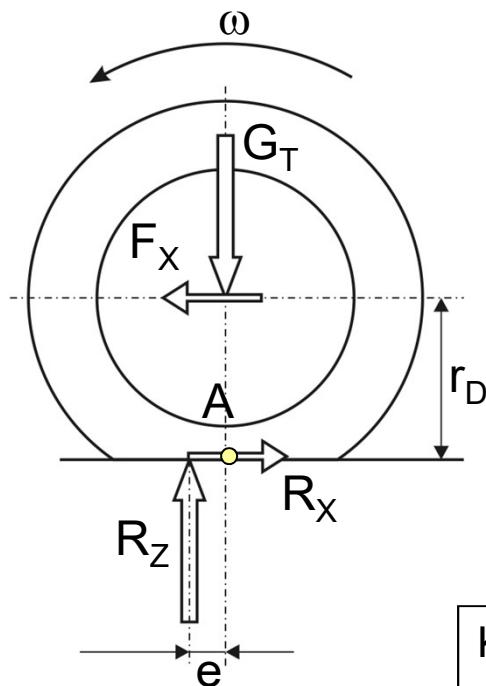
SILE KOJE DELUJU NA TOČAK:

G_T – vertikalno opterećenje točka
 R_Z – vertikalna reakcija podlove
 F_x – horizontalna reakcija između vozila i točka
(ovde: sila kojom vozilo povlači točak)
 R_x – tangencijalna reakcija između točka i podlove
 e – ekscentricitet vertikalne reakcije
 r_D – dinamički radijus točka

U daljim razmatranjima će za krak tangencijalne sile biti usvojen r_D , na osnovu približne jednakosti $r_D \approx r_{ST}$

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)



Ustaljeno kretanje (statika):

$$\sum Z_i \Rightarrow R_z = G_T$$

$$\sum X_i \Rightarrow R_x = F_x$$

$$\sum M_A \Rightarrow e \cdot R_z = r_D \cdot F_x \quad | /r_D$$

$$\Rightarrow R_x = \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

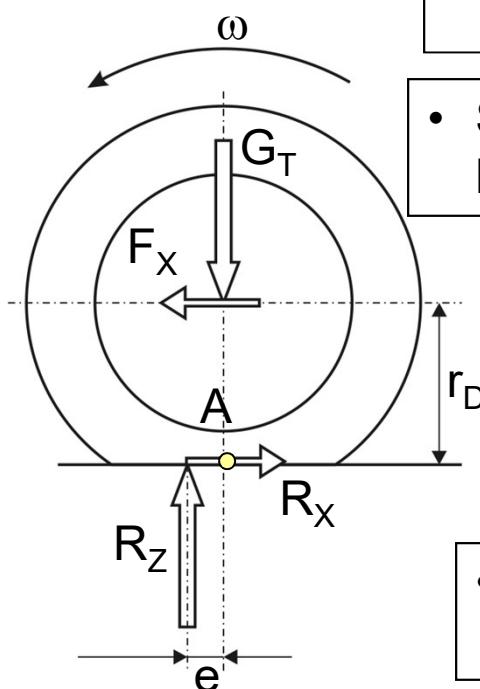
$$\frac{e}{r_D} = f \rightarrow \text{koeficijent otpora kotrljanja}$$

Koeficijent $f \rightarrow$ empirijsko određivanje odnosa e/r_D uz uzimanje u obzir ostalih uzroka nastanka otpora kotrljanja točka.

$f \cdot G_T \equiv F_{fT} - \text{SILA OTPORA KOTRLJANJA TOČKA}$

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)



$f \cdot G_T \equiv F_{fT}$ – SILA OTPORA KOTRLJANJA TOČKA

- Sila otpora kotrljanja proporcionalna je koeficijentu otpora kotrljanja i vertikalnom opterećenju točka.

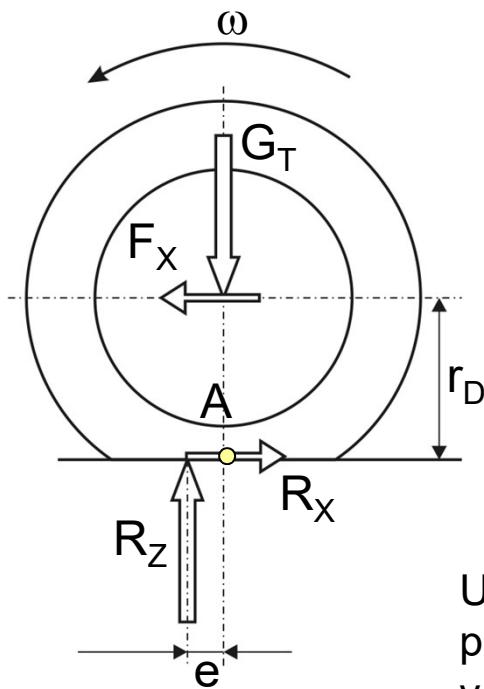
$$R_x = \frac{e}{r_D} \cdot G_T = f \cdot G_T = F_{fT}$$

- Tangencijalna reakcija slobodnog točka jednaka je sili otpora kotrljanja.

Obično je $f \sim 0,01 \rightarrow$ detaljnije u nastavku...

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

NEPOGONSKI TOČAK (slobodno kotrljanje)



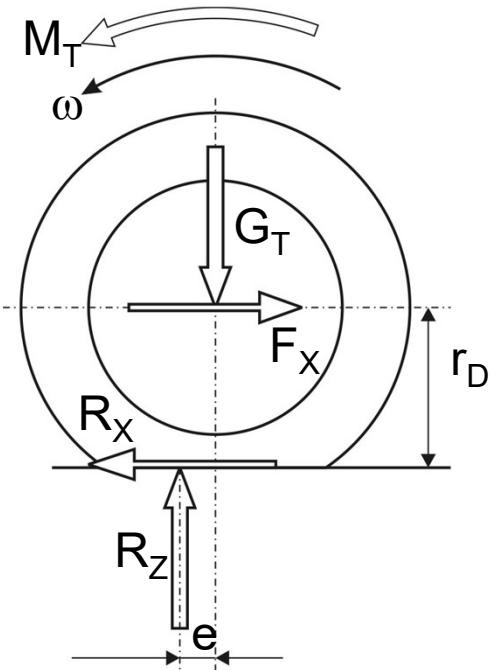
$$F_x = R_x = f \cdot G_T = F_{fT}$$

- aktivna sila koju moramo saopštiti slobodnom točku da bi se kotrljao

Uslov za nastanak sile R_x je trenje (prijanjanje) između točka i podloge - na podlozi bez trenja slobodan točak se ne bi kotrljao već bi klizao translatorno!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

POGONSKI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)



M_T – pogonski obrtni moment na točku
 F_x – horizontalna reakcija između vozila i točka
(ovde: sila kojom vozilo zadržava točak)

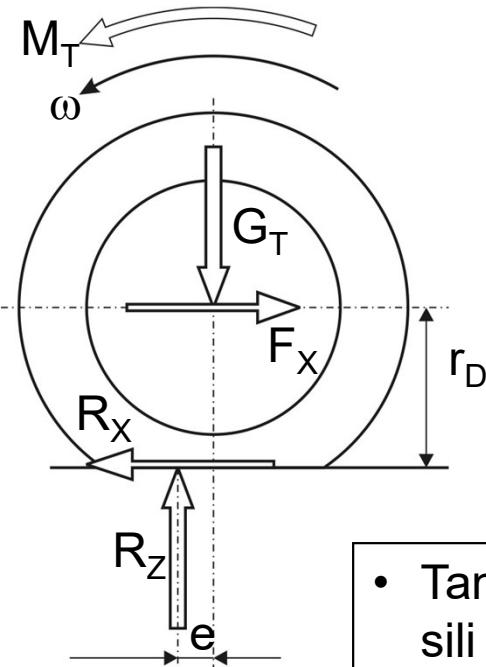
$$\begin{aligned}\sum Z_i &\Rightarrow R_z = G_T \\ \sum X_i &\Rightarrow R_x = F_x \\ \sum M_A &\Rightarrow M_T = e \cdot R_z + r_D \cdot F_x \quad | /r_D\end{aligned}$$

$$\frac{M_T}{r_D} \equiv F_o \rightarrow \text{definicija}$$

F_o – obimna (vučna) sila na točku → fiktivna (tj. računska) veličina!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

POGONSKI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)



$$R_z = G_T, \quad R_x = F_x \\ M_T = e \cdot G_T + r_D \cdot R_x$$

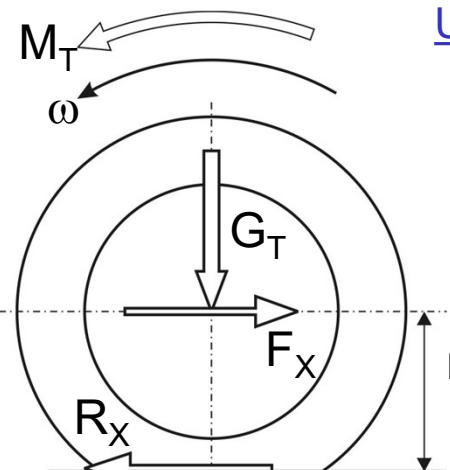
$$\rightarrow | / r_D \quad R_x = \frac{M_T}{r_D} - \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

$R_x = F_o - F_f \rightarrow$ stvarna tangencijalna reakcija na pogonskom točku

- Tangencijalna reakcija pogonskog točka jednaka je obimnoj sili (tj. odnosu pogonskog momenta i dinamičkog radijusa točka), umanjenoj za vrednost sile otpora kotrljanja.

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

POGONSKI TOČAK PRI UBRZANOM KRETANJU ($a > 0$)



UTICAJ MOMENTA INERCIJE

Druga jednačina ravanskog kretanja za točak:

$$J_C \cdot \dot{\omega} = -r_D \cdot R_x - M_f + M_T$$

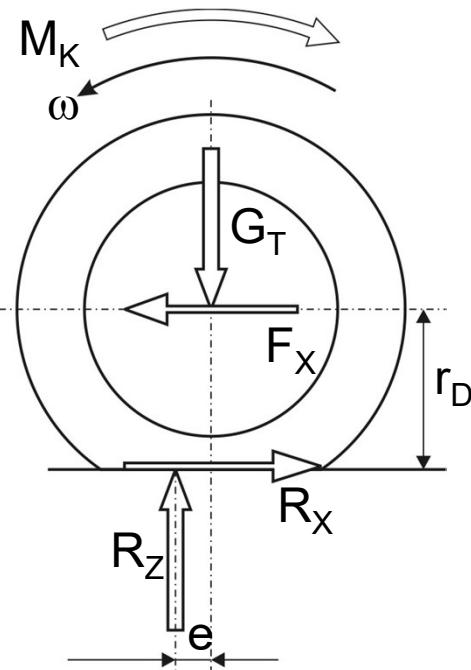
$$M_f = e \cdot G_T \quad F_O \equiv \frac{M_T}{r_D} \quad \dot{\omega} > 0$$

$$R_x = F_O - F_f - \frac{J_C \cdot \dot{\omega}}{r_D} \rightarrow \text{stvarna tangencijalna reakcija na pogonskom točku pri ubrzanim kretanju}$$

Deo pogonskog momenta saopštenog točku se "troši" na savlađivanje MOMENTA INERCIJE tj. na ubrzanje obrtnih masa, drugi deo se "troši" na savlađivanje sopstvenog otpora kotrljanja točka; ostatak R_x je na raspolaganju za savlađivanje otpora F_x i transl. ubrzanje točka

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

KOČENI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)



Slučaj: kočenje na nizbrdici radi održavanja brzine

M_K – kočni moment na točku

F_X – horizontalna reakcija između vozila i točka
(ovde: sila kojom vozilo gura točak)

$$\sum Z_i \Rightarrow R_Z = G_T$$

$$\sum X_i \Rightarrow R_X = F_X$$

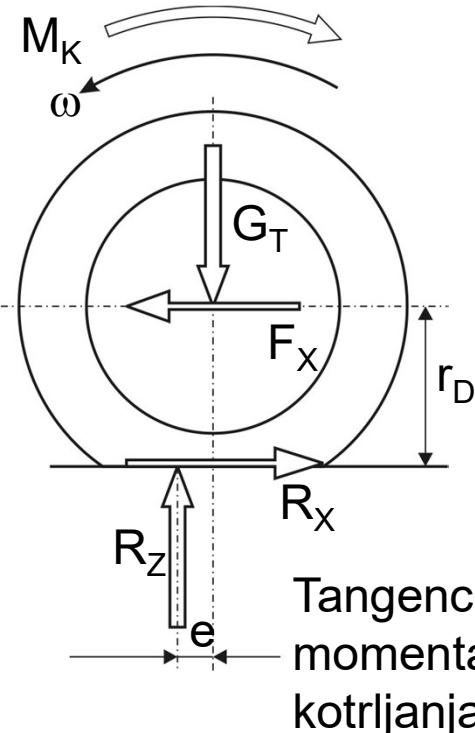
$$\sum M_A \Rightarrow r_D \cdot F_X = M_K + e \cdot R_Z \quad | /r_D$$

$$\frac{M_K}{r_D} \equiv F_K \rightarrow \text{definicija}$$

F_K – kočna sila na točku → fiktivna (računska) veličina!

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

KOČENI TOČAK PRI USTALJENOM KRETANJU ($v=\text{const}$)



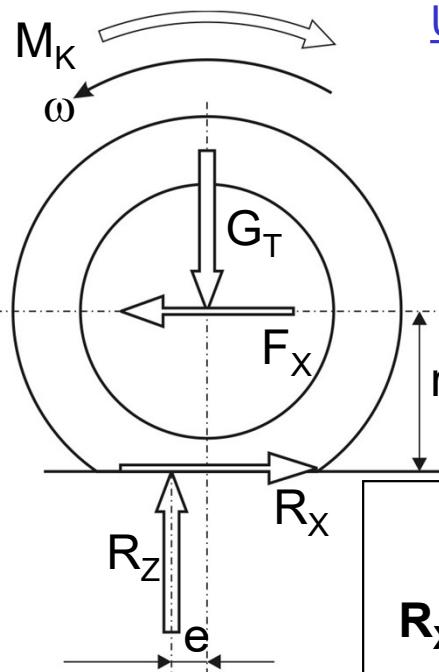
$$R_x = \frac{M_K}{r_D} + \frac{e}{r_D} \cdot G_T$$

$R_x = F_K + F_f \rightarrow$ stvarna tangencijalna reakcija na kočenom točku

Tangencijalna reakcija kočenog točka jednaka je odnosu kočnog momenta i dinamičkog radijusa točka, uvećanom za vrednost otpora kotrljanja.

Kotrljanje deformabilnog točka po krutoj podlozi

KOČENI TOČAK PRI USPORENOM KRETANJU ($a < 0$)



UTICAJ MOMENTA INERCIJE

Druga jednačina ravanskog kretanja za točak:

$$J_C \cdot \dot{\omega} = r_D \cdot R_x - M_f - M_K$$

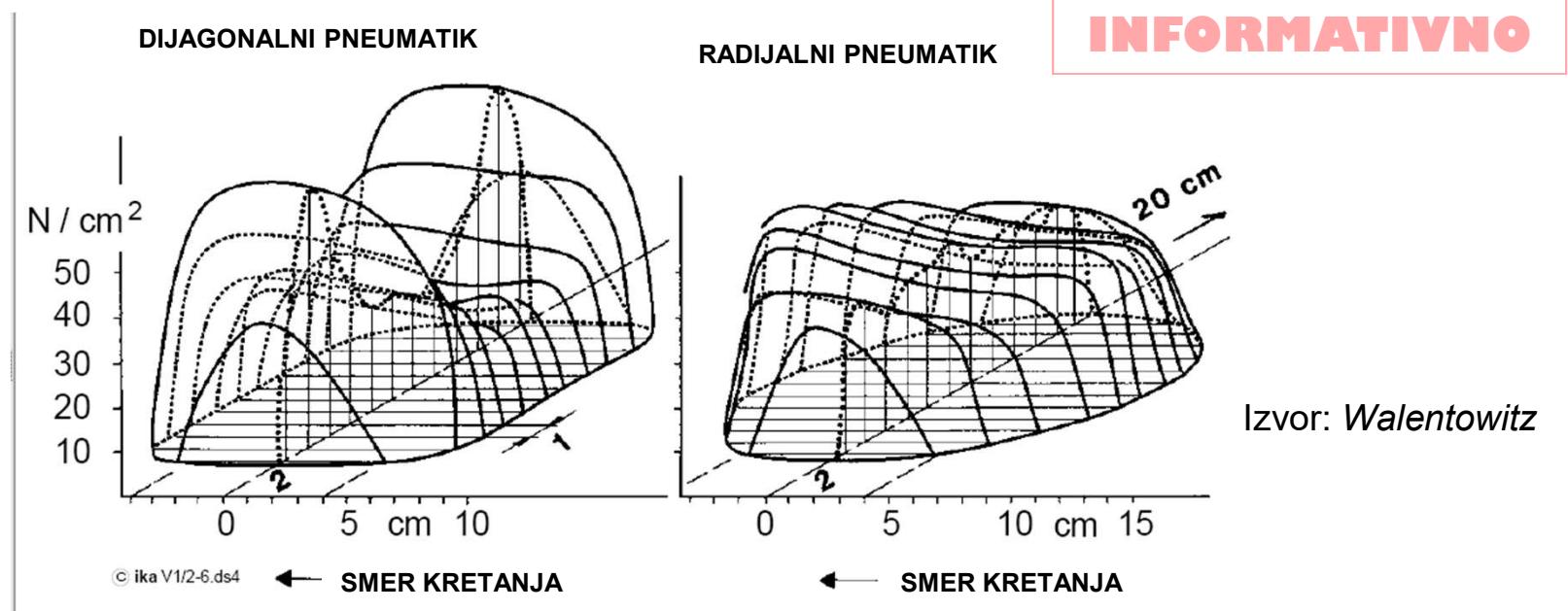
$$M_f = e \cdot G_T \quad F_K \equiv \frac{M_K}{r_D} \quad \dot{\omega} < 0$$

$$R_x = F_K + F_f - \frac{J_C \cdot |\dot{\omega}|}{r_D} \rightarrow \text{stvarna tangencijalna reakcija na kočenom točku pri usporenom kretanju}$$

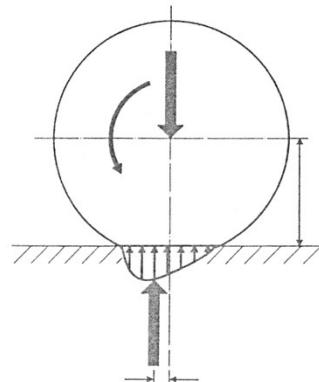
Analogija sa ubrzanjem: deo kočnog momenta se "troši" na usporavanje obrtnih masa, ostatak je na raspolaaganju za translatorno usporenje – R_x ; otpor kotrljanja pomaže kočenju!

OTPOR KOTRLJANJA TOČKA

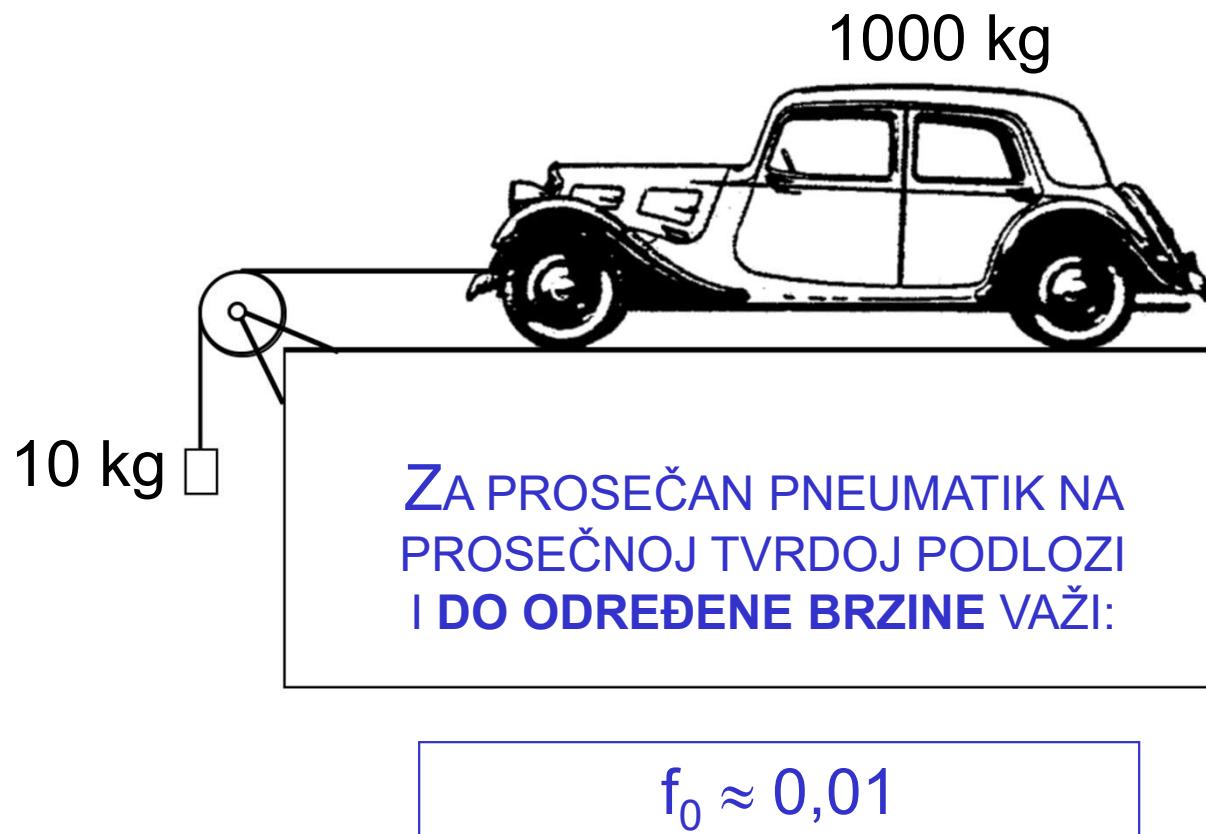
Raspored kontaktnih pritisaka za radijalni i dijagonalni pneumatik



Pojednostavljeni prikaz →



Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori



Šta tačno znači "do određene brzine"? → u nastavku...
Orientaciono ~ 100 km/h

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

INFORMATIVNO

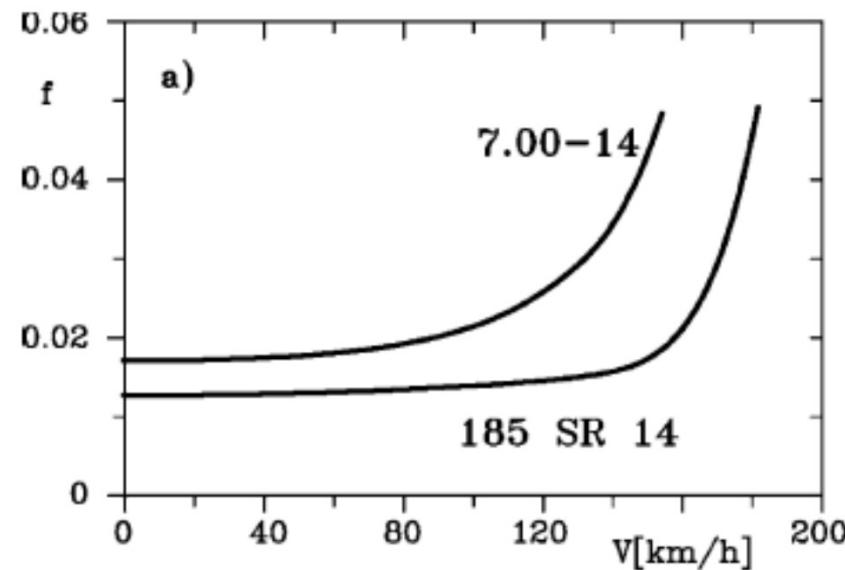
Vrsta i stanje tla	f	
	Točak	Gusenica
Asfalt (odličan)	0,010-0,018	
Asfalt (prosečan)	0,018-0,020	
Asfalt (loš)	0,020-0,023	
Beton (odličan)	0,011-0,020	
Beton (loš)	0,020-0,030	
Makadam (odličan)	0,013-0,018	
Makadam (prosečan)	0,018-0,023	
Makadam (loš)	0,023-0,040	
Zemljani put (utaban)	0,025-0,035	0,050-0,070
Zemljani put (prosečan)	0,050-0,080	
Zemljani put (loš, blato)	0,160-0,200	0,100-0,150
Pesak (vlažan)	0,150-0,300	0,100-0,150
Strnjika	0,080-0,100	0,060-0,080
Oranica	0,120-0,180	0,080-0,100
Polje pripremljeno za setvu	0,160-0,180	0,090-0,120
Utaban put u snegu	0,030-0,040	0,060-0,070

ORIJENTACIONE VREDNOSTI ZA f (za male brzine)

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

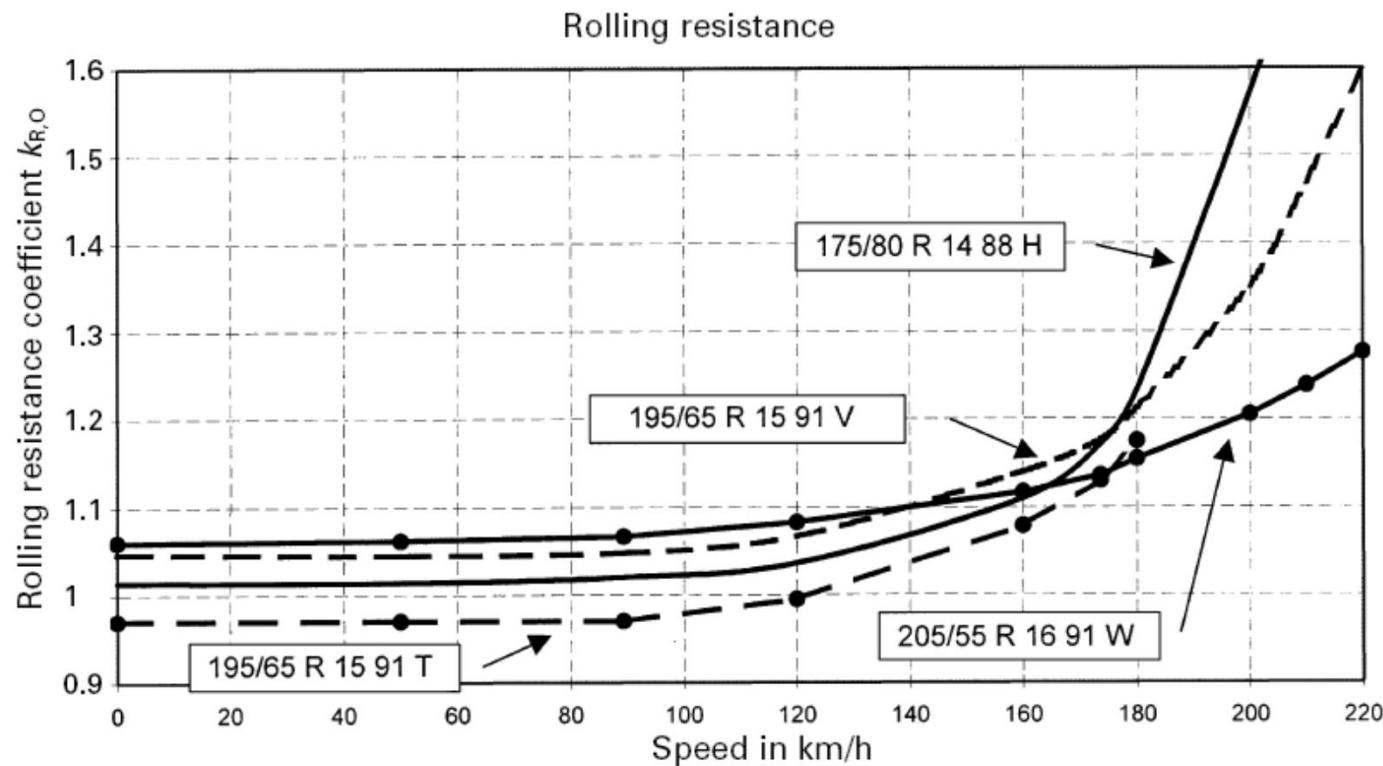
Pri početnom porastu brzine – za širi dijapazon – blag porast;
pri većim brzinama nagli!



Izvor: Genta/Morello

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE



Izvor: Reimpell

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

Empirijska relacija – opšti oblik:

$$f = C_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^2 + C_3 \cdot v^3 + C_4 \cdot v^4 + \dots$$

Primer:

$$f = f_0 + C_1 \cdot v + C_2 \cdot v^4, v \text{ (km/h)}$$

$$f_0 = 0,01$$

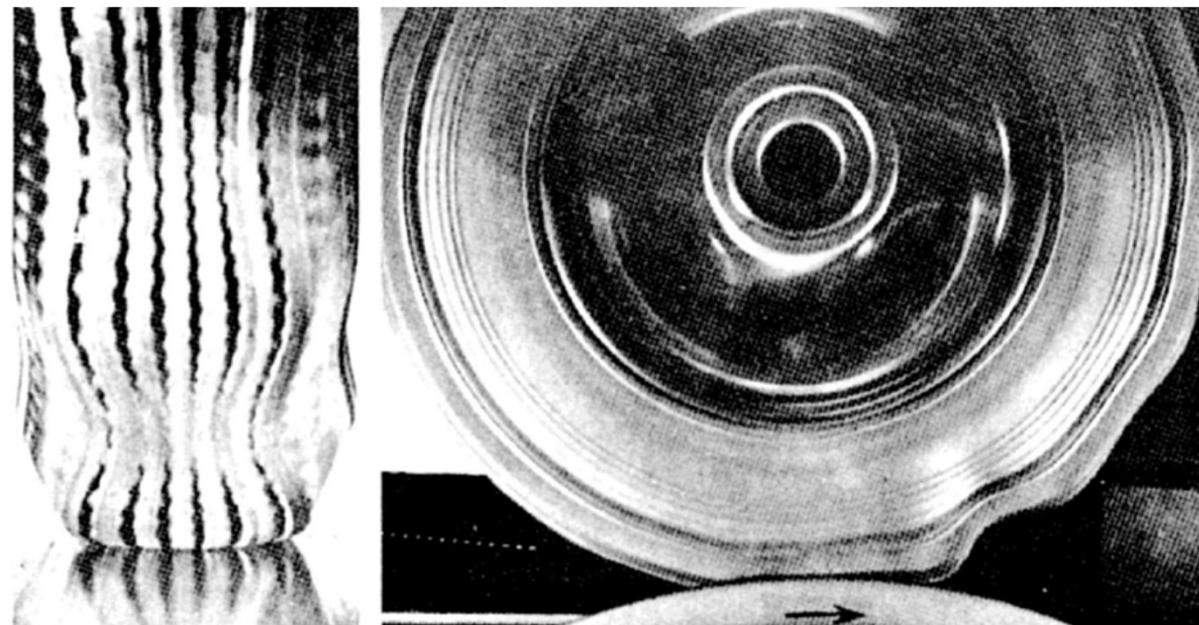
$$C_1 = 5,42 \cdot 10^{-6}$$

$$C_2 = 1,05 \cdot 10^{-11}$$

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ BRZINE

Izvor: Genta / Morello



Šta ograničava maksimalnu brzinu kretanja za određeni pneumatik?

Formira se stojeći deformacijski talas koji dovodi do razaranja pneumatika!

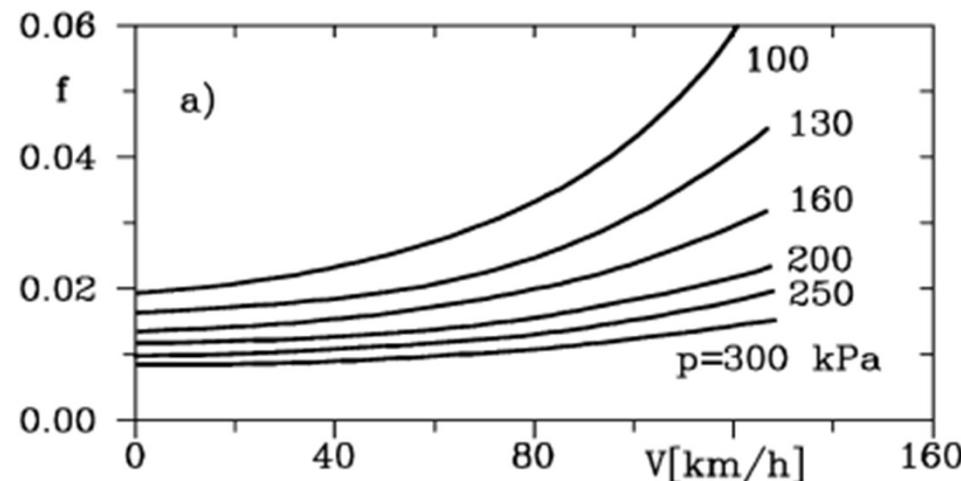
Pri neodgovarajućim pritiscima može doći do pregrevanja i devulkanizacije zbog pretvaranja deformacijskog rada u toplotu!

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ PRITISKA

Viši pritisak \Rightarrow manja deformacija \Rightarrow manji otpor kotrljanja

Vrednosti ograničene zahtevima za prijanjanje, udobnost, habanje



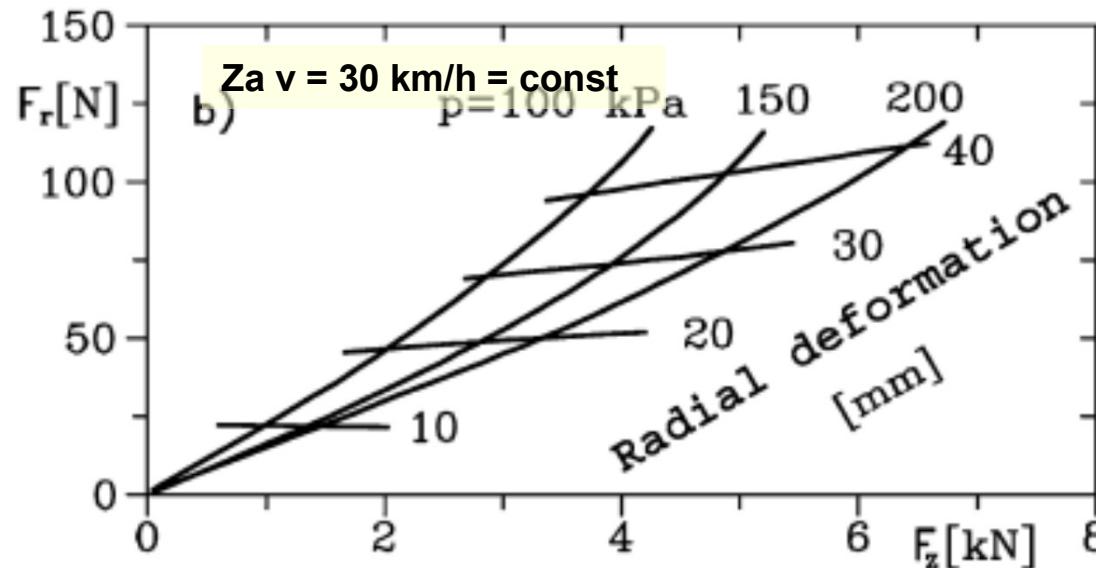
Izvor: Genta / Morello

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ VERTIKALNOG OPTEREĆENJA

INFORMATIVNO

Povećanje opterećenja: analogno sniženju pritiska (dužina kontaktne zone raste)



Izvor: Genta / Morello

$$\text{Empirijska relacija: } f = \frac{K'}{1000} \left(5,1 + \frac{5,5 \times 10^5 + 90F_z}{p} + \frac{1100 + 0,0388F_zV^2}{p} \right)$$

Uticaj pritiska i opterećenja na f se ne razmatra računski pod pretpostavkom da je pritisak prilagođen datom opterećenju!
(defleksija ostaje približno ista)

Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ KONSTRUKTIVNIH PARAMETARA PNEUMATIKA

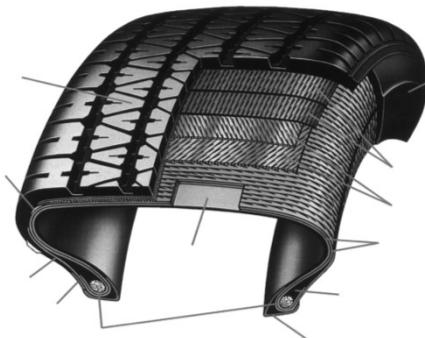
Koeficijent f opada sa:

INFORMATIVNO

- povećanjem dimenzija pneumatika
- smanjenjem odnosa visine prema širini (ukrućenje boka, manji histerezis)
- poboljšanjem sastava smeše gume – smanjenje histerezisa

Struktura otpora histerezisa:

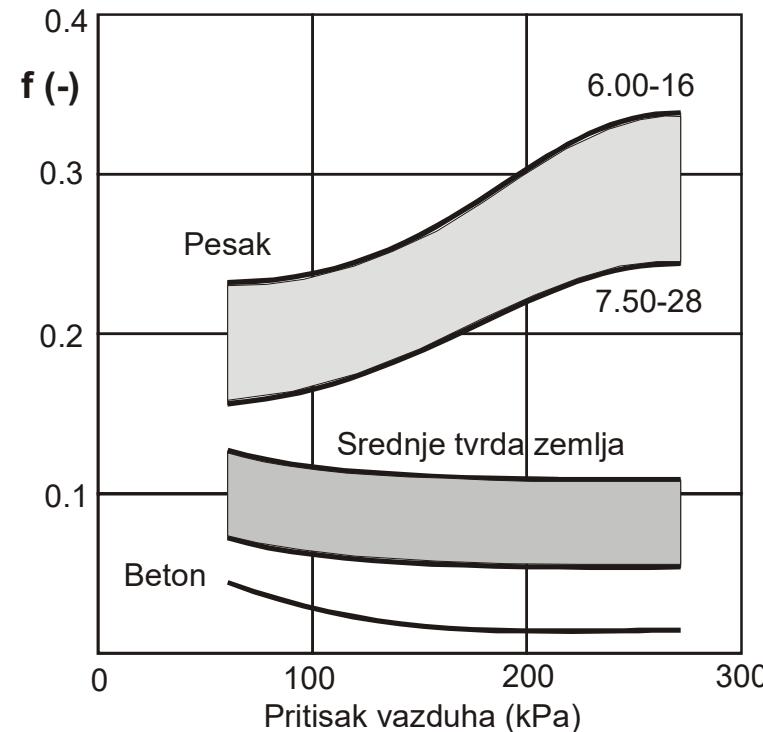
- 50% - gazeći sloj
- 20% - pojas
- 10% - karkasa
- 10% - bok



Otpor kotrljanja točka – vrednosti i uticajni faktori

UTICAJ VRSTE I STANJA PODLOGE

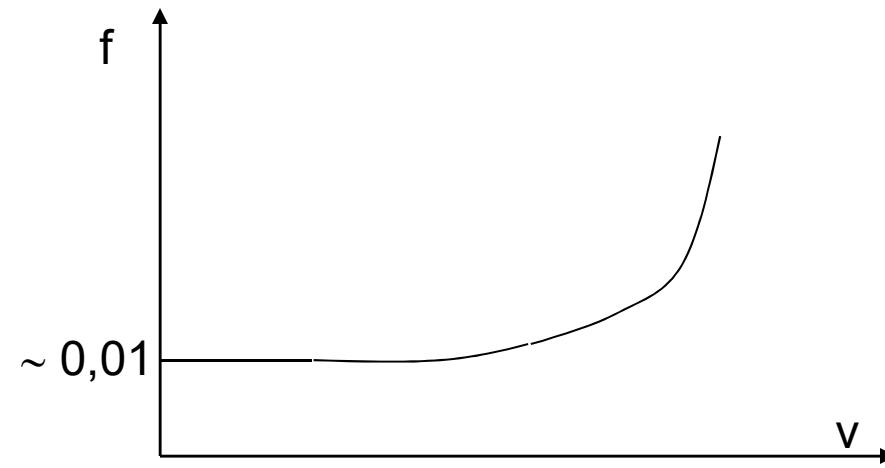
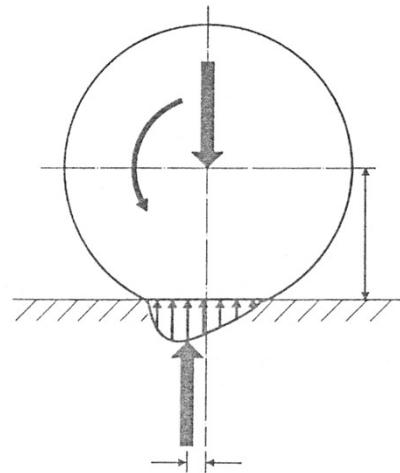
- neravna podloga – povećan histerezis
- prisustvo vlage (otpor vodenog filma, prilepljivanje pneumatika za tlo)
- meka podloga – uticaj deformacije



Otpor kotrljanja točka – ostali izvori nastanka

- bočno povođenje točka (\rightarrow “scrubbing off speed”)
- geometrija točka (bočni nagib, usmerenost)
- prisustvo primesa na čvrstoj podlozi (potiskivanje vodenog filma, sloja peska i sl.)
- kratkotalanje neravnine podlage (pojačan uticaj histerezisa)
- trenje klizanja u kontaktnoj površini (tangencijalne def. u gazećem sloju)
- trenje u ležaju točka
- zaostali moment kočenja
- itd.

OTPOR KOTRLJANJA - REZIME



Glavni eksploracioni faktori koji utiču na otpor kotrljanja:

- brzina → RAZMATRA SE RAČUNSKI
- pritisak
- vertikalno opterećenje } → OBIČNO SE NE RAZMATRAJU RAČUNSKI – smatra se da su međusobno usklađeni