URAVNOTEŽENJE

POJAM I TIPOVI

Pri kretanju mehanizma, u vezama mehanizma sa podlogom (nepokretnim članom) javljaju se reakcije veza. Te reakcije (sile i momenti) se preko ležajeva prenose na podlogu. One zavise od opterećenja koje deluju na mehanizam: jedan deo nastaje usled težina članova, drugi deo nastaje usled radnih opterećenja, treći deo nastaje usled trenja, četvrti deo nastaje usled inercijalnih opterećenja.

Od posebnog interesa su komponente reakcija u vezama mehanizma sa podlogom koje nastaju **usled inercijalnih opterećenja.** Ove komponente su generalno promenljive u toku vremena (po intenzitetu i pravcu). To znači da će doći do dodatnog **dinamičkog** naprezanja ležajeva, moguća je pojava trenja, izvesno se pojavljuju vibracije i udari i dr., u najekstremnijem slučaju može doći do havarije

Zato se pri projektovanju mašina i mehanizama javlja kao značajan zadatak izbor oblika i raspodela mase članova mehanizma koji će obezbediti **potpuno ili delimično poništavanje komponente reakcija u vezama mehanizma sa podlogom koje nastaju usled inercijalnih opterećenja.**

POJAM I TIPOVI

Ovaj postupak se naziva uravnoteženje inercijalnih sila.

Može se pokazati da je uslov da su reakcije u vezama podloge i mehanizma jednake nuli ekvivalentan uslovima da su glavni vektor inercijalnih sila i glavni moment inercijalnih sila, jednaki nuli.

U zavisnosti od toga koji uslovi su ispunjeni razlikuju se:

Delimično uravnoteženje

- glavni vektor inercijalnih sila članova mehanizma jednak nuli

$$\vec{F}_{IN\,R} = 0$$

Potpuno uravnoteženje

– glavni vektor inercijalnih sila i glavni moment inercijalnih sila su jednaki nuli

$$\vec{F}_{IN\,R} = 0\,, \qquad \vec{M}_{IN\,R} = 0$$

OPŠTI USLOVI

članovi mehanizma se posmatraju kao sistemi materijalnih tačaka (ceo mehanizam je sistem od i materijalnih tačaka), zato u jednačini nema Min

Glavni vektor inercijalnih sila

$$\vec{F}_{IN\,R}=\sum\vec{F}_{INi}=-\sum m_i\vec{a}_i$$

$$F_{IN\,R\,x}=-\sum m_i\cdot\ddot{x}_i$$

$$F_{IN\,R\,y}=-\sum m_i\cdot\ddot{y}_i$$

$$F_{IN\,R\,z}=-\sum m_i\cdot\ddot{z}_i$$

Glavni moment inercijalnih sila

$$\vec{M}_{IN\,R}=\left[\vec{r}_s,\vec{F}_{IN\,R}\right]=\sum\left[\vec{r}_i,\vec{F}_{INi}\right]=-\sum m_i\left[\vec{r}_i,\vec{a}_i\right]$$

$$\vec{M}_{IN\,R}=\sum\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_i & y_i & z_i\\ F_{INix} & F_{INiy} & F_{INiz}\end{vmatrix}=-\sum m_i\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_i & y_i & z_i\\ \ddot{x}_i & \ddot{y}_i & \ddot{z}_i\end{vmatrix}$$

$$M_{IN\,R\,x}=-\sum m_i\left(y_i\ddot{z}_i-z_i\ddot{y}_i\right)$$

$$M_{IN\,R\,y}=-\sum m_i\left(z_i\ddot{x}_i-x_i\ddot{z}_i\right)$$

$$M_{IN\,R\,z}=-\sum m_i\left(x_i\ddot{y}_i-y_i\ddot{x}_i\right)$$

$z_i=\mathrm{const}$

$\ddot{z}_i=0$

$F_{IN\,R\,z}=-\sum m_i\ddot{z}_i=0$

$M_{IN\,R\,z}$ – ne razmatra se jer se ne prenosi na podlogu

USLOVI:

$$F_{IN\,R\,x}=-\sum m_i\ddot{x}_i=0 \quad M_{IN\,R\,x}=\sum m_i z_i\ddot{y}_i=0$$

$$F_{IN\,R\,y}=-\sum m_i\ddot{y}_i=0 \quad M_{IN\,R\,y}=-\sum m_i z_i\ddot{x}_i=0$$

OPŠTI USLOVI

φ je ugao položaja ulaznog člana, ω je ugaona brzina ulaznog člana, $\dot{\omega}$ je ugaono obrzanje ulaznog člana

$$x_i = x_i(\varphi) \qquad y_i = y_i(\varphi) \qquad \varphi = \varphi(t) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega}$$

$$\ddot{x}_i(\varphi) = \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \frac{dx_i}{d\varphi} \cdot \dot{\omega} \qquad \ddot{y}_i(\varphi) = \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} \cdot \omega^2 + \frac{dy_i}{d\varphi} \cdot \dot{\omega}$$

USLOVI:

$$F_{IN\,Rx} = -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\phi^2} - \dot{\omega} \sum m_i \frac{dx_i}{d\phi} = 0 \qquad M_{IN\,Rx} = \omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\phi^2} + \dot{\omega} \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\phi} = 0$$

$$F_{IN\,Ry} = -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\phi^2} - \dot{\omega} \sum m_i \frac{dy_i}{d\phi} = 0 \qquad M_{IN\,Ry} = -\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\phi^2} - \dot{\omega} \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\phi} = 0$$

Da bi gornji uslovi bili ispunjeni, zahtevaće se da je svaki sabirak jednak nuli. Ovo je zgodno, jer ako je drugi sabirak jednak nuli onda prvi sabirak postaje automatski jednak nuli.

1. $\boxed{\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0}$ $\quad \cancel{\sum m_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} = 0}$

2. $\boxed{\sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0}$ $\quad \cancel{\sum m_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} = 0}$

3. $\boxed{\sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0}$ $\quad \cancel{\sum m_i z_i \frac{d^2 y_i}{d\varphi^2} = 0}$

4. $\boxed{\sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0}$ $\quad \cancel{\sum m_i z_i \frac{d^2 x_i}{d\varphi^2} = 0}$

OPŠTI USLOVI

Delimično uravnoteženje

glavni vektor inercijalnih sila jednak nuli – težište mehanizma se ne pomera tokom kretanja

$$\boxed{1.\ \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0} \qquad \frac{d}{d\varphi}\sum m_i x_i = \frac{d}{d\varphi} M \cdot x_s = M \frac{dx_s}{d\varphi} = 0$$

$$\boxed{2.\ \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0} \qquad \frac{d}{d\varphi}\sum m_i y_i = \frac{d}{d\varphi} M \cdot y_s = M \frac{dy_s}{d\varphi} = 0$$

$$x_s = const$$
$$y_s = const$$

$$\vec{r}_s = const$$

Potpuno uravnoteženje

glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila su jednaki nuli – centrifugalni momenti inercije celokupnog mehanizma se ne menjaju tokom kretanja

$$+$$

$$\boxed{3.\ \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0} \qquad \frac{d}{d\varphi}\sum m_i z_i x_i = \frac{d}{d\varphi} I_{xz} = \frac{dI_{xz}}{d\varphi} = 0$$

$$\boxed{4.\ \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0} \qquad \frac{d}{d\varphi}\sum m_i z_i y_i = \frac{d}{d\varphi} I_{yz} = \frac{dI_{yz}}{d\varphi} = 0$$

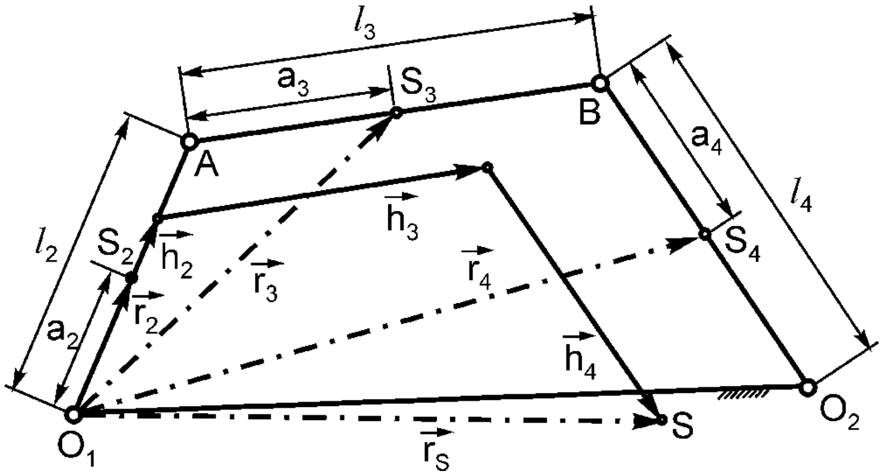
$$I_{xz} = const$$
$$I_{yz} = const$$

URAVNOTEŽENJE ZGLOBNOG ČETVOROUGLA

Delimično uravnoteženje

- glavni vektor inercijalnih sila jednak nuli

$$\boxed{\vec{r}_s = const}$$



$$\vec{r}_s = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

$$\vec{r}_s = \frac{m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4}{M}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{a}_2 \quad \vec{r}_3 = \vec{l}_2 + \vec{a}_3 \quad \vec{r}_4 = \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \vec{a}_4$$

$$\vec{r}_s = \frac{\vec{a}_2 m_2 + \vec{l}_2 (m_3 + m_4)}{M} + \frac{\vec{a}_3 m_3 + \vec{l}_3 m_4}{M} + \frac{\vec{a}_4 m_4}{M}$$

$$\vec{r}_s = 0$$

$$\vec{r}_s = \vec{h}_2 + \vec{h}_3 + \vec{h}_4$$

$$h_2 = h_3 = h_4 = 0$$

URAVNOTEŽENJE ZGLOBNOG ČETVOROUGLA

$$h_2 = a_2 m_2 + l_2 (m_3 + m_4) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{l_2 (m_3 + m_4)}{m_2}$$

$$h_3 = a_3 m_3 + l_3 m_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 = -\frac{l_3 m_4}{m_3}$$

$$h_4 = a_4 m_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_4 = 0$$

a_i

– rastojanje od oslonca do težišta

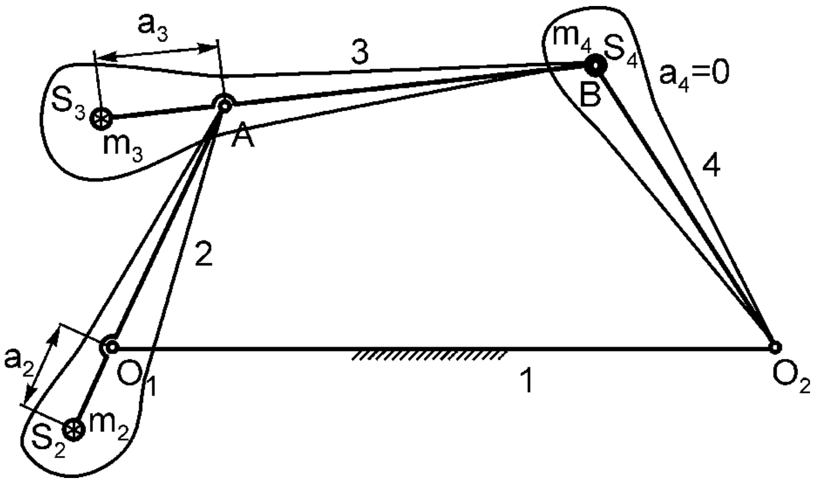
korišćenje protivtegova

težište članova se pomera **dodavanjem protivtegova**

(pogledati u knjizi)

samouravnoteženje

težište se pomera **rasporedom masa članova**



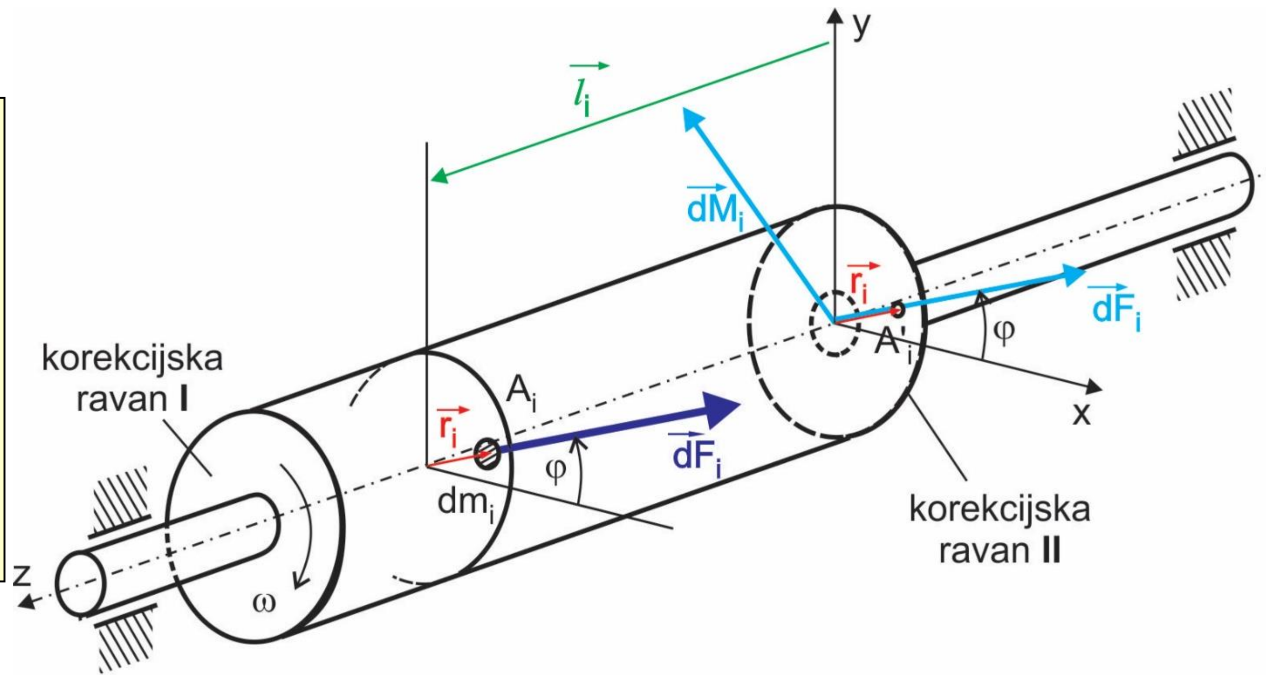
URAVNOTEŽENJE ROTORA

Usled neravnomerne raspodele masa sklopa rotora – **odstupanja ose rotora od ose obrtanja i položaj težišta van ose obrtanja** nastaju spoljašnje sile koje su periodične i prenose se na ležišta rotora, kućište i postolje mašine.

Ove sile i njihovi momenti izazivaju vibracije mašine, pogoršavaju uslove podmazivanja u ležištima čime dolazi do njihovog naglog trošenja, pa se može poremetiti stabilnost rada mašine pa čak i izazvati ozbiljno oštećenje ili havarija.

$$d\vec{F}_{IN\,i} = -\omega^2 dm_i \vec{r}_i\ ,\quad \overrightarrow{OA_i} = \vec{r}_i + \vec{\ell}_i$$

$$\begin{aligned} d\vec{M}_{IN\,i} &= \left[\overrightarrow{OA_i}, d\vec{F}_{IN\,i}\right] \\ &= -\omega^2 dm_i\left[\left(\vec{r}_i+\vec{\ell}_i\right),\vec{r}_i\right] \\ &= -\omega^2 dm_i\left[\vec{\ell}_i,\vec{r}_i\right] \end{aligned}$$



$$d\vec{F}_{IN\,i} = -\omega^2 dm_i \vec{r}_i$$

$$\vec{F}_{IN\,R} = -\int_V \omega^2 dm_i \vec{r}_i$$

$$d\vec{M}_{IN\,i} = -\omega^2 dm_i \left[\vec{\ell}_i, \vec{r}_i\right]$$

$$\vec{M}_{IN\,R} = -\int_V \omega^2 dm_i \left[\vec{\ell}_i, \vec{r}_i\right]$$

$$F_{IN\,Rx} = -\int_V \omega^2 dm_i x_i = -\omega^2 \int_V x_i dm_i = -\omega^2 \cdot M \cdot x_C$$

$$F_{IN\,Ry} = -\int_V \omega^2 dm_i y_i = -\omega^2 \int_V y_i dm_i = -\omega^2 \cdot M \cdot y_C$$

$$M_{IN\,Rx} = -\int_V \omega^2 dm_i \ell_i r_i \cos\phi = -\omega^2 \int_V z_i y_i dm_i = -\omega^2 \cdot J_{zy}$$

$$M_{IN\,Ry} = -\int_V \omega^2 dm_i \left(-\ell_i r_i \cos\phi\right) = \omega^2 \int_V z_i x_i dm_i = \omega^2 \cdot J_{zx}$$

U slučaju kada je rotor predstavjen kao sistem diskretnih masa:

$$F_{IN\,Rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \cdot M \cdot x_C = 0 \quad \Rightarrow \quad x_C = 0 \qquad \sum m_i x_i = 0$$

$$F_{IN\,Ry} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \cdot M \cdot y_C = 0 \quad \Rightarrow \quad y_C = 0 \qquad \sum m_i y_i = 0$$

$$M_{IN\,Rx} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \cdot J_{zy} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{zy} = 0 \qquad \sum m_i z_i y_i = 0$$

$$M_{IN\,Ry} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\omega^2 \cdot J_{zx} = 0 \quad \Rightarrow \quad J_{zx} = 0 \qquad \sum m_i z_i x_i = 0$$

URAVNOTEŽENJE ROTORA

Potpuno uravnoteženje

– glavni vektor i glavni moment inercijalnih sila su jednaki nuli

Za potpuno uravnoteženje je dovoljno postaviti protivtegove masa m_I i m_{II} u dve korekcijske ravni *I-I* i *II-II*

$$\sum m_i \vec{r}_i = 0$$

$$\sum m_i x_i + m_{II} x_{II} + m_I x_I = 0$$

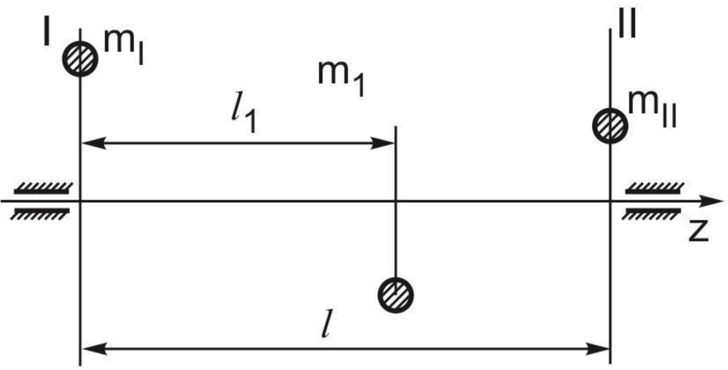
$$\sum m_i y_i + m_{II} y_{II} + m_I y_I = 0$$

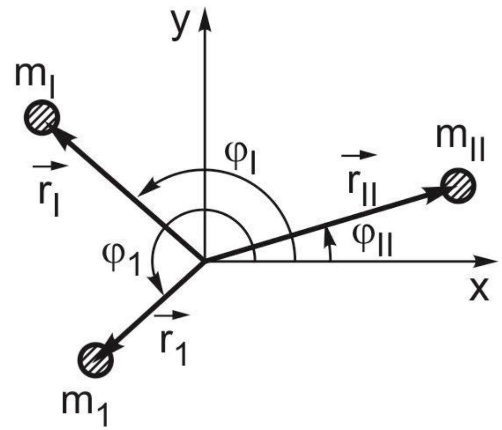
$$\sum m_i \left[\vec{\ell}_i , \vec{r}_i \right] = 0$$

$$\sum m_i \ell_i x_i + m_{II} \ell x_{II} = 0$$

$$\sum m_i \ell_i y_i + m_{II} \ell y_{II} = 0$$

URAVNOTEŽENJE ROTORA





$$\sum m_i \vec{r}_i = m_I \vec{r}_I + m_1 \vec{r}_1 + m_{II} \vec{r}_{II} = 0$$

$$\sum m_i x_i = 0 \qquad m_1 x_1 + m_{II} x_{II} + m_I x_I = 0$$

$$\sum m_i y_i = 0 \qquad m_1 y_1 + m_{II} y_{II} + m_I y_I = 0$$

$$\sum m_i \left[\vec{\ell}_i , \vec{r}_i \right] = m_1 \left[\vec{\ell}_1 , \vec{r}_1 \right] + m_{II} \left[\vec{\ell}_{II} , \vec{r}_{II} \right] = 0$$

$$\sum m_i z_i x_i = 0 \qquad m_1 \ell_1 x_1 + m_{II} \ell x_{II} = 0$$

$$\sum m_i z_i y_i = 0 \qquad m_1 \ell_1 y_1 + m_{II} \ell y_{II} = 0$$

Poznato:

1. Neuravnoreženost (veličina i položaj)

$$m_1,\ r_1,\ \varphi_1$$

2. Poluprečnici na koje se stavljaju protivtegovi

$$r_I,\ r_{II}$$

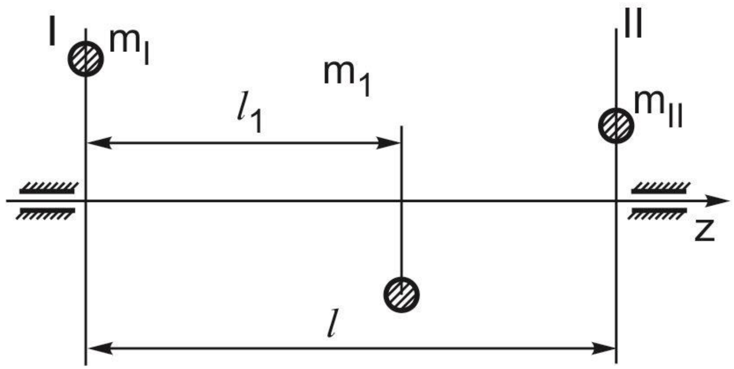
Treba:

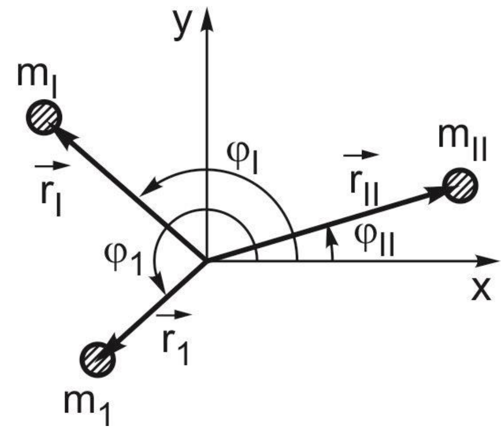
Veličine (mase) protivtegova i uglovi na koje se postavljaju

$$m_I,\ \varphi_I$$

$$m_{II},\ \varphi_{II}$$

URAVNOTEŽENJE ROTORA





$$m_1 x_1 + m_{II} x_{II} + m_I x_I = 0$$

$$m_1 y_1 + m_{II} y_{II} + m_I y_I = 0$$

$$m_1 \ell_1 x_1 + m_{II} \ell x_{II} = 0$$

$$m_1 \ell_1 y_1 + m_{II} \ell y_{II} = 0$$

$$m_1 r_1 \cos\varphi_1 + m_I r_I \cos\varphi_I + m_{II} r_{II} \cos\varphi_{II} = 0$$

$$m_1 r_1 \sin\varphi_1 + m_I r_I \sin\varphi_I + m_{II} r_{II} \sin\varphi_{II} = 0$$

$$m_1 \ell_1 r_1 \cos\varphi_1 + m_{II} \ell r_{II} \cos\varphi_{II} = 0$$

$$m_1 \ell_1 r_1 \sin\varphi_1 + m_{II} \ell r_{II} \sin\varphi_{II} = 0$$

$$tg\varphi_{II} = \frac{y_{II}}{x_{II}} = \frac{m_1 \ell_1 r_1 \sin\varphi_1}{m_1 \ell_1 x_1 \cos\varphi_1}$$

$$m_{II} = -\frac{m_1 \ell_1 r_1 \cos\varphi_1}{r_{II} \cdot \cos\varphi_{II} \cdot \ell}$$

$$tg\varphi_I = \frac{y_I}{x_I} = \frac{m_1 r_1 \sin\varphi_1 + m_{II} \sin\varphi_{II}}{m_1 r_1 \cos\varphi_1 + m_{II} r_{II} \cos\varphi_{II}}$$

$$m_I = -\frac{m_1 r_1 \cos\varphi_1 + m_{II} r_{II} \cos\varphi_{II}}{r_I \cdot \cos\varphi_I}$$